Chapitre 1

Suites numériques

Certaines équations, comme celles du second degré, se résolvent avec une formule. Il n'en est pas de même pour la majorité d'entre elles ; on est amené alors à définir des suites d'éléments qui tendent vers les solutions de l'équation étudiée, c'est-à-dire qui s'en approchent d'aussi près que l'on veut.

Un mathématicien

Léonard de Pise, plus connu sous le surnom de **Fibonacci**, vivait dans la première moitié du XIIIe siècle. Après avoir voyagé en Afrique du Nord, il se persuade de la supériorité des chiffres arabes, c'est-à-dire ceux que nous utilisons de nos jours pour noter les nombres. Il explique comment effectuer des opérations élémentaires dans *Liber Abaci*, un ouvrage paru en 1202. Cependant, il reste célèbre pour avoir défini une suite de nombre (u_n) avec $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ en prenant l'exemple de couples de lapins qui, dès leur deuxième mois d'existence, donnent naissance à un nouveau couple chaque mois.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Le nombre π ne s'exprime pas sous forme de fraction et n'est la solution d'aucune équation polynomiale de quelque degré qu'elle soit : on dit qu'il est transcendant.
Aussi pour calculer ses décimales on utilise des suites qui convergent vers π, c'est-à-dire dont les termes s'en rapprochent d'aussi près que l'on veut.
Avant les ordinateurs, l'obtention d'un grand nombre de décimales nécessitait des calculs longs et fastidieux.
De nos jours, on en connaît des millions que l'on calcule pour la gloire et non pour des besoins concrets.

COMPÉTENCES

les incontournables

- Calculer les termes d'une suite
  - lorsqu'elle est définie de manière explicite
  - lorsqu'elle est définie par récurrence
- Étudier le sens de variation d'une suite
- Démontrer qu'une suite est arithmétique
- Démontrer qu'une suite est géométrique
- Établir le terme général d'une suite
  - en reconnaissant une suite arithmétique
  - en reconnaissant une suite géométrique

et plus si affinités

- Calculer la somme de termes consécutifs
  - dans le cas d'une suite arithmétique
  - dans le cas d'une suite géométrique

Résumé de cours

Généralités

Définition : *Une **suite** u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ qui à tout entier naturel associe un réel $u(n)$, noté u_n. Cette suite se note u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou (u_n).*

Vocabulaire : *u_n est appelé **le terme général** de la suite (u_n) ou le terme de rang n ou encore le terme d'indice n. u_0 est appelé **le terme initial** de la suite (u_n).*

Remarque : une suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang n_0. On peut alors la noter $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et son terme initial est u_{n_0}.

Modes de génération

Définition : *Lorsqu'une suite est donnée par son terme général u_n exprimé en fonction de n indépendamment des termes précédents, on dit que la suite est définie **sous forme explicite**.*

Définition : *Lorsqu'une suite est donnée par son premier terme et une relation exprimant chaque terme en fonction du terme précédent, on dit que la suite est définie par une **relation de récurrence**.*

Sens de variation

Définition : *Une suite (u_n) est **croissante** lorsque pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.*
*Une suite u_n est **décroissante** lorsque pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.*
*Une suite u_n est **constante** lorsque pour tout entier naturel n, $u_n = u_{n+1}$.*

Vocabulaire : *Une suite est dite **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante*

Remarque : s'il existe un entier p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, on ait $u_n \leqslant u_{n+1}$ (respectivement $u_n \geqslant u_{n+1}$), on dit que la suite est croissante (respectivement décroissante) à partir du rang p.

Suites arithmétiques

Définition à l'aide d'une relation de récurrence

Définition : *Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, on ait :*

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

Vocabulaire : *Le réel r est appelé la **raison de la suite**.*

Expression du terme général

Théorème 1.1.— Une suite arithmétique est entièrement et uniquement déterminée par la donnée de sa raison r et de son premier terme u_0. On a alors pour tout $n \geqslant 0$:

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

Inversement, on a :

Proposition 1.2.— Soit a et b deux réels. Toute suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_n = an + b$ est une suite arithmétique de raison a et de premier terme b

Somme des premiers termes

Théorème 1.3.— Pour tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ qui s'écrit aussi } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Proposition 1.4.— Soit n et p deux entiers tels que $n \leqslant p$. La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :

$$\boxed{u_n + u_{n+1} + \cdots + u_p = \frac{u_n + u_p}{2} \times (p - n + 1)}$$

Sens de variation

Proposition 1.5.— Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite arithmétique de raison r.

- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.

■ Suites géométriques

Définition à l'aide d'une relation de récurrence

Définition : *Une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est dite **géométrique** lorsqu'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n, on ait :*

$$\boxed{u_{n+1} = qu_n}$$

Vocabulaire : *Le réel q est appelé la **raison de la suite**.*

Remarque : si $q = 0$ ou si $u_0 = 0$ alors pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 0$. On ne considère en général que des suites géométriques dont aucun terme n'est nul.

Expression du terme général

Théorème 1.6.— Une suite géométrique de premier terme non nul est entièrement et uniquement déterminée par la donnée de sa raison q et de son premier temre u_0. On a alors pour tout $n \geqslant 0$:

$$\boxed{u_n = u_0 q^n}$$

Proposition 1.7.— Toute suite de terme général $u_n = aq^n$ est géométrique de raison q et de premier terme a.

Somme des premiers termes

Théorème 1.8.— Soit q un réel quelconque et n un entier naturel :

- Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ qui s'écrit aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
- Si $q = 1$ alors $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = n + 1$

Proposition 1.9.— Si $q \neq 1$, la somme $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{p+n-1}$ de n termes d'une suite géométrique de raison q est égale à :

$$\boxed{u_p \times \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

Sens de variation

Proposition 1.10.— Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme u_0 non nul.

- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.
- Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $q < 0$, alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

■ Notion de limite infinie

Définition : *Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite. On dit que la suite tend vers $+\infty$ si, quel que soit le nombre A, tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang. On dit aussi que (u_n) a pour limite $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.*

Démonstrations

Théorème 1.1.— Une suite arithmétique est entièrement et uniquement déterminée par la donnée de sa raison r et de son premier terme u_0. On a alors pour tout $n \geqslant 0$:

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

Démonstration ▽

La démonstration de ce théorème se fait en deux étapes :

$\boxed{1}$ Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n naturel par $u_n = u_0 + nr$.
On a $u_{n+1} - u_n = u_0 + (n+1)r - (u_0 + nr) = u_0 + nr + r - u_0 - nr = r$.
La suite (u_n) est donc une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

$\boxed{2}$ Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & u_0 + r \\ u_2 & = & u_1 + r \\ \cdots & = & \cdots \\ u_{n-1} & = & u_{n-2} + r \\ u_n & = & u_{n-1} + r \end{array}$$

En ajoutant membre à membre toutes ces égalités, on obtient :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + nr$$

Après simplification, on a $u_n = u_0 + nr$.
Ce qui prouve que seule la suite s'écrivant $u_n = u_0 + nr$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. ▲

Théorème 1.6.— Une suite géométrique de premier terme non nul est entièrement et uniquement déterminée par la donnée de sa raison q et de son premier temre u_0. On a alors pour tout $n \geqslant 0$:

$$\boxed{u_n = u_0 q^n}$$

Démonstration ▽

La démonstration de ce théorème se fait en deux étapes :

$\boxed{1}$ Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n naturel par $u_n = u_0 q^n$.
On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_0 q^{n+1}}{u_0 q^n} = q$.
La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

$\boxed{2}$ Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & u_0 q \\ u_2 & = & u_1 q \\ \cdots & = & \cdots \\ u_{n-1} & = & u_{n-2} q \\ u_n & = & u_{n-1} q \end{array}$$

On multiplie membre à membre toutes ces égalités, on obtient :

$$u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{n-1} \times u_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1} \times q^n$$

Après simplification, on a $u_n = u_0 q^n$.
Ce qui prouve que seule la suite s'écrivant $u_n = u_0 q^n$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. ▲

Théorème 1.3.— Pour tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ ce qui s'écrit aussi } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Démonstration ▽
Pour n entier naturel non nul :

$$\begin{array}{rccccccccccccc} \text{Posons :} & S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\ \text{On a aussi :} & S & = & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

En additionnant membre à membre les deux égalités, on obtient :

$$2S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{n \text{ fois}}$$

Soit

$$2S = n(n+1) \text{ d'où } S = \frac{n(n+1)}{2}$$

▲

Théorème 1.8.— Soit q un réel quelconque et n un entier naturel :

- Si $q \neq 1$ alors $1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ qui s'écrit aussi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- Si $q = 1$ alors $1+q+q^2+\cdots+q^n = n+1$

Démonstration ▽
Le cas $q = 1$ est évident.
Si $q \neq 1$ alors posons $S = 1+q+q^2+\cdots+q^n$.
On a donc $q \times S = q \times (1+q+q^2+\cdots+q^n) = q+q^2+q^3+\cdots+q^{n+1}$.
D'où :

$$\begin{aligned} S - q \times S &= (1+q+q^2+\cdots+q^n) - (q+q^2+q^3+\cdots+q^{n+1}) \\ S - q \times S &= 1-q^{n+1} \\ S \times (1-q) &= 1-q^{n+1} \\ S &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \end{aligned}$$

▲

Approfondissements, algorithmes

Approfondissements théoriques

Somme des n premiers carrés

Théorème 1.11.— Somme des n premiers carrés —. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1}{6}}$$

Exemple : si $n = 5$

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 &= 55 \\ \frac{5 \times (5+1) \times (2 \times 5 + 1)}{6} &= 55 \end{aligned}$$

Démonstration $\triangledown$

On note $S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ et $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

On sait que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1)^3 = (n+1)(n+1)^2 = (n+1)(n^2 + 2n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

On peut utiliser cette formule pour tous les entiers de 0 à n, on a :

$$\begin{array}{rcl} (0+1)^3 &=& 0^3 + 3 \times 0^2 + 3 \times 0 + 1 \\ (1+1)^3 &=& 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1 \\ (2+1)^3 &=& 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1 \\ \cdots &=& \cdots \\ (n-2+1)^3 &=& (n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1 \\ (n-1+1)^3 &=& (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ (n+1)^3 &=& n^3 + 3n^2 + 3n + 1^3 \end{array}$$

En ajoutant membre à membre toutes ces égalités, on a :

$$S_3 + (n+1)^3 = S_3 + 3S_2 + 3S_1 + (n+1)$$

d'où :

$$\begin{array}{rcl} (n+1)^3 &=& 3S_2 + 3S_1 + (n+1) \\ n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &=& 3S_2 + 3\dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 &=& 6S_2 + 3n(n+1) + 2(n+1) \\ 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2 &=& 6S_2 \\ 6S_2 &=& 2n^3 + 3n^2 + n \\ 6S_2 &=& n(2n^3 + 3n + 1) \\ 6S_2 &=& n(n+1)(2n+1) \\ S_2 &=& \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{array}$$

$\blacktriangle$