# 1 Les fonctions polynômes du second degré

Résumés de cours

## 1. Définitions

### Fonction polynôme de degré 2 ou trinôme

Une fonction $f$, définie sur $\mathbb{R}$, s'appelle une fonction polynôme de degré 2 quand son expression est de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a$ n'est pas nul.

Une expression $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, s'appelle un trinôme.

### Racines ou zéros d'un trinôme

Les solutions, s'il en existe, de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ s'appellent les racines ou les zéros ou du trinôme ou de la fonction polynôme de degré 2 correspondante.

## 2. Résolution d'une équation du second degré

Une fois que l'équation du second degré se présente sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, on calcule d'abord le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

La suite de l'histoire dépend alors du signe du discriminant trouvé.

Quand $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution.

Quand $\Delta = 0$ l'équation a une et une seule solution, le nombre $-\dfrac{b}{2a}$.

Quand $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions, les deux nombres :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

## 3. La forme canonique d'un trinôme

La forme $ax^2 + bx + c$ d'un trinôme est sa **forme développée réduite**.

Or $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ ; cette nouvelle forme est la **forme canonique** du trinôme.

Il est commode de s'en souvenir sous la forme suivante :

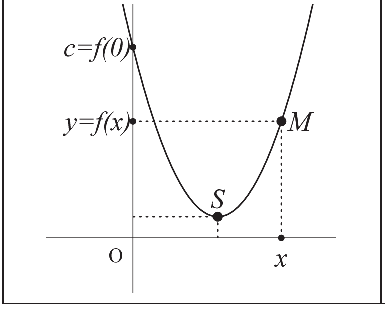
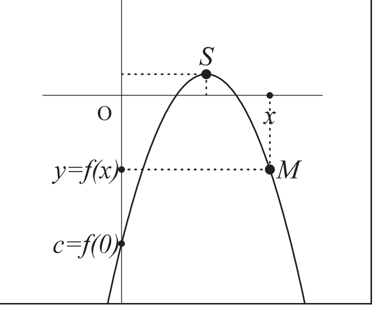
$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]\underset{\text{en développant}}{=}a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\underset{\substack{\text{en changeant}\\\text{de notations}}}{=}a(x-\alpha)^2+\beta$$

en posant $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$ où $f(x)=ax^2+bx+c$.

## 4. Représentation graphique des fonctions polynômes du second degré

### Les paraboles

Dans un repère orthonormé du plan, la représentation graphique d'une fonction $f(x)=ax^2+bx+c$ est une parabole. Selon le signe de $a$, le coefficient de $x^2$, la parabole a une allure différente :

| $a>0$ | $a<0$ |
|---|---|
|   |   |

### À savoir sur les paraboles

- Le sommet $S$ de la parabole a pour coordonnées $(\alpha\,;\beta)$ où $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$. Le nombre $\beta$ est, selon le signe de $a$, le minimum ou le maximum de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ ; cet extremum est atteint pour $x=\alpha$.
- La parabole admet un axe de symétrie : la droite verticale passant par son sommet $S$, c'est-à-dire la droite d'équation $x=\alpha$.
- Le point d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0\,;f(0))=(0\,;c)$.
- Les solutions de l'équation $f(x)=0\Leftrightarrow ax^2+bx+c=0$ sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses ; il y en a deux ou une ou aucune, selon le signe du discriminant $\Delta$.
- Un point M du plan est sur la parabole si et seulement si ses coordonnées $(x\,;y)$ vérifient $y=f(x)\Leftrightarrow y=ax^2+bx+c$ ; $y=ax^2+bx+c$ est une équation de la parabole.

## 5. Signe d'un trinôme

Le signe, positif ou négatif, de $f(x) = ax^2 + bx + c$ dépend du trinôme considéré et de la valeur de $x$.

<table>
<tr><th>Les différents trinômes</th><th>Le signe de $f(x)$</th></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$,<br>trinôme sans racine</td><td>
<table>
<tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>Signe de $a$</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$,<br>trinôme à une racine</td><td>
<table>
<tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$-b/2a$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>Signe de $a$</td><td>0</td><td>Signe de $a$</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$,<br>trinôme à deux racines</td><td>
<table>
<tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$x_1$</td><td></td><td>$x_2$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>Signe de $a$</td><td>0</td><td>Signe de $-a$</td><td>0</td><td>Signe de $a$</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Ces différents signes sont visibles sur le dessin de la parabole. Selon que le point $(x\ ;\ y = f(x))$ de la parabole est au-dessus ou en dessous de l'axe des abscisses, alors $f(x)$ est positif ou négatif.

## 6. Les trinômes à discriminant strictement positif

### Leur forme factorisée

Ces trinômes ont une forme développée réduite, une forme canonique mais aussi une forme factorisée $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ; c'est la forme factorisée du trinôme où $x_1$ et $x_2$ sont les deux racines du trinôme.

### Les trinômes simples $ax^2 + bx$ avec $b \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4 \times a \times 0 = b^2 > 0$

Pour les trinômes simples $ax^2 + bx$ où $c = 0$, la factorisation est évidente à cause du facteur commun $x$ : $ax^2 + bx = x(ax + b)$.

Ce qui rend la résolution de l'équation $ax^2+bx=0$ simple également puisque $ax^2+bx=0 \Leftrightarrow x(ax+b)=0$. L'équation s'étant écrite sous la forme d'une équation à produit nul, l'un des facteurs est nul : $x=0$ ou $ax+b=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$.
L'équation $ax^2+bx=0$ a donc deux solutions : $S=\left\{0\ ;\ -\frac{b}{a}\right\}$.

Inutile dans ce cas particulier d'en passer par le discriminant $\Delta$ ; la méthode générale de résolution d'une équation du second degré nous mènerait bien sûr aux mêmes solutions ; ce n'est pas la méthode qui fait les réponses.

### Somme et produit des deux racines $x_1$ et $x_2$

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

On en déduit que pour trouver deux nombres inconnus dont la somme $s$ et le produit $p$ sont connus, donnés, il suffit de résoudre l'équation du second degré $x^2-sx+p=0$ ; ces deux nombres sont les solutions de cette équation, s'ils existent.

## Énoncés des exercices

### * Exercice 1 — 10 min

Déterminer la forme développée réduite $ax^2+bx+c$ des trinômes suivants :

$A(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{7}$ $B(x)=3(x-1)^2+5$ $C(x)=2(x-3)-x(2x-1)$

### * Exercice 2 — 10 min

Résoudre les équations du second degré suivantes ; on donnera la valeur exacte des solutions, quand il y en a, puis, si besoin, des valeurs approximatives au centième près.

$(E_1)$ : $2x^2+3x+4=0$ $(E_2)$ : $x^2-6x+9=0$ $(E_3)$ : $x^2+5x=1$

### * Exercice 3 — 10 min

Déterminer la forme canonique des trinômes suivants :

$A(x)=x^2+x+1$ $B(x)=4x^2-8x+4$ $C(x)=x^2+2x$.

### * Exercice 4 — 15 min

Soit l'équation du second degré d'inconnue $x$ : $x^2-ax+6=0$.

*Les deux questions sont indépendantes.*

1. Sachant que 2 est solution de cette équation, trouver $a$. Déterminer alors l'autre solution de cette équation.
2. Sachant que $\sqrt{2}$ est solution de cette équation, montrer que $a=4\sqrt{2}$. Déterminer alors l'autre solution de cette équation.

### * Exercice 5 — 15 min

On considère le trinôme $f(x)=4x^2-9$.

1. En utilisant une identité remarquable, factoriser $f(x)$.
2. En utilisant la factorisation trouvée, résoudre l'équation $f(x)=0$.
3. Répondre aux mêmes questions pour le trinôme $g(x)=(2x-1)^2-(x+2)^2$.

## * Exercice 6

⏰ 10 min

Soit le trinôme $f(x) = 3x^2 + 4x - 7$.

**1.** Déterminer une racine évidente de ce trinôme ; on appelle racine évidente une racine qui est un nombre simple comme 0 ou 1 ou 2 ou $-1$ ou $-2$.

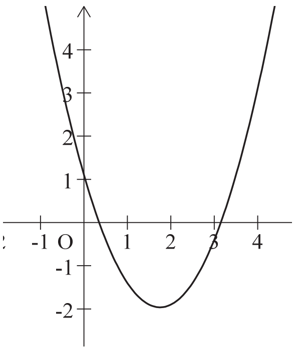
**2.** Ce trinôme a-t-il une autre racine ? Laquelle ?

## * Exercice 7

⏰ 15 min

La parabole suivante représente le trinôme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$




**1.** Par lecture graphique donner les signes demandés : $+$ ou $-$ :

| | $a$ | $b$ | $\alpha$ | $\beta$ | $f(1)$ | $f(4)$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signes | | | | | | | |

**2.** Donner des réponses approximatives aux questions suivantes :

| | |
|---|---|
| Les deux zéros de la fonction $f$ | |
| Tous les $x$ tels que $f(x) < 0$ | |
| L'image de 1 | |
| Les antécédents de 2 | |
| Le minimum de la fonction $f$ | |

## * Exercice 8

⏰ 20 min

On considère le trinôme $f(x) = (x-1)(x-4)$.

**1.** Sans changer la forme de $f(x)$, résoudre l'équation $f(x) = 0$.

**2.** Déterminer la forme développée réduite de $f(x)$.

**3.** Justifier que, sans même calculer le discriminant $\Delta$ du trinôme $f(x)$, on peut affirmer que $\Delta > 0$.

**4.** Calculer les coordonnées du sommet $S$ de la parabole $P$ représentative de la fonction $f$.

**5.** Le point $A$ de coordonnées $(10 ; y)$ est sur la parabole $P$ ; calculer $y$.

**6.** Le point $B$ de coordonnées $(x ; 10)$ est sur la parabole $P$ ; calculer $x$.

## * Exercice 9 — 30 min

Compléter les tableaux de signe suivants.

| | |
|---|---|
| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
| Signe de $2x-6$ | |
| Signe de $-2x+4$ | |
| Signe de $(2x-6)(-2x+4)$ | |
| Signe de $\dfrac{2x-6}{-2x+4}$ | |

| | |
|---|---|
| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
| Signe de $2x^2+x+1$ | |

| | |
|---|---|
| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
| Signe de $-x^2+5x$ | |

| | |
|---|---|
| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
| Signe de $2(x-1)^2$ | |

## * Exercice 10 — 25 min

Résoudre les inéquations suivantes :

$(\mathrm{I}_1) : \dfrac{1-2x}{3} \geq 5$ $(\mathrm{I}_2) : x^2+x+1 \leq 0$ $(\mathrm{I}_3) : x^2 < x$

## * Exercice 11 — 15 min

Déterminer tous les nombres réels dont le carré est inférieur au double.

Exercices

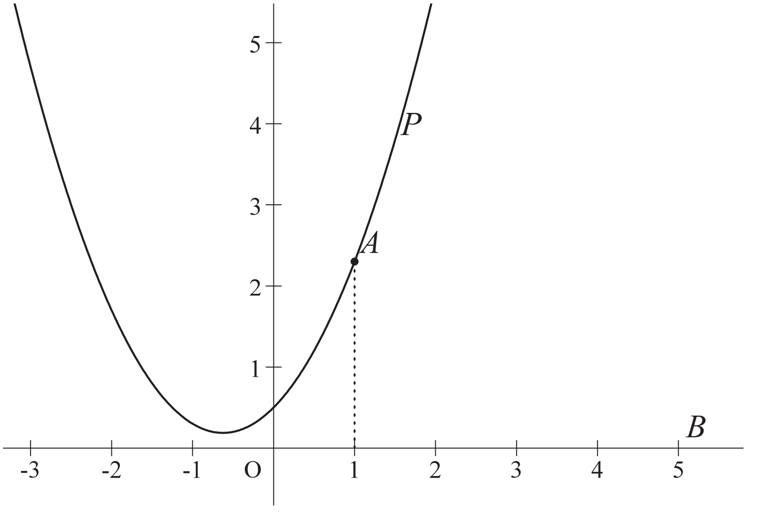
## * Exercice 12 — 10 min

**1.** Développer et réduire $(x-2)(x^2+2x+4)$.

**2.** Résoudre l'équation $x^3=8$.

## * Exercice 13 — 25 min

Sont représentés ci-dessous, dans un repère orthonormé du plan, la parabole $P$ d'équation $y=0{,}8x^2+x+0{,}5$, le point $A$ de cette parabole d'abscisse 1 et le point $B$ de coordonnées $(5\ ;0)$.




**1.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $P$ avec l'axe des ordonnées.

Vérifier par calculs que $P$ ne croise pas l'axe des abscisses.

**2.** Vérifier qu'une équation de la droite ($AB$) est $y=-0{,}575x+2{,}875$.

**3.** Résoudre l'équation $0{,}8x^2+x+0{,}5=-0{,}575x+2{,}875$. Interpréter graphiquement les solutions trouvées.

**4.** La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?

Proposition : « Quelle que soit la position de $B$ sur l'axe des abscisses, la droite ($AB$) et la parabole $P$ se croisent deux fois ».



Exercices