Jour n^{o}1

Exercice 1.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI

Ici, n est un entier supérieur ou égal à 1.

1) Montrer que $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2i\pi k}{n}} \right)$.

Préciser alors, dans $\mathbb{R}[X]$, selon la parité de n, la décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$.

2) On suppose que x est un réel différent de -1 et de 1.

a) Montrer l'existence de $I = \int_0^{\pi} \ln \left(x^2 - 2x \cos t + 1 \right) \, dt$.

b) Calculer I, en utilisant la décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$ dans le cas où n est pair.

Exercice 1.2 — MPSI-PCSI-PTSI

1) Étudier la convergence de la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 0,\ u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2},$$

en fonction de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

2) On considère maintenant la série de même terme général u_n.

a) Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ en fonction de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

b) En cas de convergence, calculer sa somme.

c) Toujours en cas de convergence, déterminer un équivalent de son reste partiel d'ordre n.

Énoncé

Ici, n est un entier supérieur ou égal à 1.

1) Montrer que $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2i\pi k}{n}}\right)$.

Préciser alors, dans $\mathbb{R}[X]$, selon la parité de n, la décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$.

2) On suppose que x est un réel différent de -1 et de 1.

a) Montrer l'existence de $I = \int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos t + 1\right)\, dt$.

b) Calculer I, en utilisant la décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$ dans le cas où n est pair.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice proposé à l'oral de Mines-Ponts, filière MP en 2016 que l'on a juste un peu aiguillé pour devenir accessible à la majorité des filières. Il est à l'intersection de deux parties du programme. D'abord la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ et ensuite l'intégration (et plus précisément les sommes de Riemann).

> Rapport du jury Concours commun INP (ex CCP) 2011
>
> Rappelons une évidence : il faut réviser l'ensemble du programme en ce qui concerne les mathématiques, et pas seulement la deuxième année, le mieux étant naturellement un travail régulier tout au long du cycle préparatoire.

1) L'égalité proposée est la décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$. On rappelle que $X^n - 1$ peut se décomposer en produit de polynômes de degré 1 de la forme $X - z_k$, où z_k est une racine complexe de $z^n = 1$. Pour la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, on posera d'abord $n = 2p$, où p est entier, on cherchera les racines réelles de $z^n = 1$ et on regroupera les autres racines non réelles par deux, une racine et son conjugué. On fera le même travail avec $n = 2p + 1$.

$\hookrightarrow$ La décomposition de $X^{2p} - 1$ ou (et) de $X^{2p+1} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ en facteurs irréductibles a (ont) sûrement été faite(s) au moins en exercice dans toutes les filières (hors 1TPC). Voilà une excellente révision pour le Jour numéro 1.

> Rapport du jury Mines-Ponts, filières PSI-PC-MP 2016
>
> Des difficultés dans la résolution des problèmes concernant l'algèbre générale (nombres complexes, polynômes, fractions rationnelles). Le calcul dans l'ensemble des nombres complexes pose problème et on voit certains candidats majorer des nombres complexes.

2) Ici, on doit calculer une intégrale. On a appris plusieurs méthodes standards pour calculer une intégrale (on reconnaît une primitive connue, on intègre par parties, on fait un changement de variable) mais ici l'on utilise une formule que l'on oublie souvent rapidement : la limite d'une somme de Riemann. Justement, ce livre est là pour que vous n'oubliiez rien !

Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2006

D'un point de vue technique, et dans le but de permettre aux candidats de se préparer plus efficacement, parmi les points faibles qui ont été relevés lors de cet oral, retenons par exemple les sommes de Riemann pourtant bien pratiques pour déterminer les limites de certaines suites.

a) On veut montrer l'existence de I. Il faut citer le cours, en étant rigoureux. Attention, en première année, on ne voit pas encore les intégrales dites généralisées (c'est-à-dire celles où la fonction sous le symbole intégrale n'est pas définie en au moins une des bornes de l'intégrale). Donc, ce qui est demandé ici c'est simplement de vérifier que la fonction sous le signe intégrale existe et est continue sur $[0, \pi]$.

$\hookrightarrow$ Ne pas oublier que $\ln(f(t))$ n'existe que si et seulement si $f(t) > 0$. Si vous avez besoin d'un coup de pouce supplémentaire, utiliser l'égalité classique (à retenir) : $x^2 - 2x\cos t + 1 = (x - e^{it})(x - e^{-it})$, après l'avoir vérifiée.

b) C'est ici que l'on fait le lien entre la décomposition en facteurs irréductibles de la première question et les sommes de Riemann. Dans le cas où $n = 2p$, on partira de l'égalité, pour $x \neq \pm 1$, et en supposant p entier non nul,

$$\frac{x^{2p} - 1}{(x-1)(x+1)} = \prod_{k=1}^{p-1} \left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{p} + 1 \right),$$

Il faut composer alors par ln de chaque côté.

$\hookrightarrow$ Commencez par revoir votre cours sur les sommes de Riemann et voyez le lien avec l'égalité que vous venez de trouver. Attention, à la fin, il faudra bien séparer le cas $|x| < 1$ et le cas $|x| > 1$.

Corrigé

1) *Décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$*

L'égalité proposée est la décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$. Nous allons, pour commencer, déterminer les racines de $X^n - 1$. Un complexe z est racine de $X^n - 1$ si et seulement si $z^n = 1$, et en posant $z = \rho e^{i\phi}$, on a :

$$\rho^n e^{in\phi} = 1 = e^{i2k\pi}, \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

En séparant module et argument, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho^n & = & 1 \\ n\phi & = & 2k\pi \end{array} \right. ,$$

où k est un entier relatif.

On a alors : $\rho = 1$ et $\phi = \dfrac{2k\pi}{n}$, et on peut restreindre $k \in [\![0, n-1]\!]$. En effet :

$$e^{i\frac{2(k+n)\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n} + i2\pi} = e^{i\frac{2k\pi}{n}},$$

pour tout entier k. Posons $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Alors :

$$\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - z_k) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2i\pi k}{n}} \right).}$$

Décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ si n est pair

Posons $n = 2p$, où p est un entier naturel non nul. Reprenons $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{k\pi}{p}}$, où $k \in [\![0, 2p-1]\!]$. On remarque que si $k = 0$, $z_0 = 1$ et si $k = p$, $z_p = -1$.
Par ailleurs, z_k et z_{2p-k} sont conjugués pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$. On écrit :

$$X^{2p} - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left[(X - z_k)(X - \bar{z}_k)\right].$$

Et, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$,

$$(X - z_k)(X - \bar{z}_k) = X^2 - (z_k + \bar{z}_k)X + |z_k|^2 = X^2 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) + 1.$$

Puis :

$$\boxed{X^{2p} - 1 = X^n - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) + 1\right).}$$

Décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ si n est impair

Posons $n = 2p+1$, où p est un entier naturel. Reprenons encore $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}$, où $k \in [\![0, 2p]\!]$. On remarque encore que si $k = 0$, $z_0 = 1$ et c'est la seule valeur réelle.
Par ailleurs, z_k et z_{2p+1-k} sont conjugués pour tout $k \in [\![1, p]\!]$. On écrit :

$$X^{2p+1} - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{p}\left[(X - z_k)(X - \bar{z}_k)\right].$$

Et, comme plus haut, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$,

$$(X - z_k)(X - \bar{z}_k) = X^2 - (z_k + \bar{z}_k)X + |z_k|^2 = X^2 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) + 1.$$

Puis :

$$\boxed{X^{2p+1} - 1 = X^n - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right).}$$

2) Ici $|x| \neq 1$.

a) Montrons l'existence de $I = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos t + 1\right)\,dt$. Pour cela, posons pour x fixé différent de -1 et de 1, $f_x(t) = x^2 - 2x\cos t + 1$. Il suffit de montrer que f_x existe, est strictement positive pour $t \in [0, \pi]$. En effet, si c'est le cas, $t \mapsto \ln(f_x(t))$ existe et est continue sur $[0, \pi]$ donc intégrable sur cet intervalle et I existe.
Nous allons utiliser l'égalité :

$$x^2 - 2x\cos t + 1 = \left(x - e^{it}\right)\left(x - e^{-it}\right),$$

qui se voit rapidement en développant le second membre :

$$\left(x - e^{it}\right)\left(x - e^{-it}\right) = x^2 - 2x\left(e^{it} + e^{-it}\right) + 1.$$

Puis en utilisant $2\cos t = e^{it} + e^{-it}$.
Donc, $f_x(t)$ ne peut s'annuler dans $\mathbb{R}$ que dans le cas où $t = 0$ ou $t = \pi$, ce qui implique $x = 1$ ou $x = -1$, ce qui est exclu.
En conclusion, $f_x(t)$ a toujours le même signe pour tout x, avec $|x| \neq 1$ et pour tout $t \in [0, \pi]$ qui est strictement positif. Finalement :

$$\boxed{I \text{ existe pour tout } x \notin \{-1, 1\}.}$$

b) On écrit, pour $x \neq \pm 1$, et en supposant p un entier non nul,

$$\frac{x^{2p} - 1}{(x-1)(x+1)} = \prod_{k=1}^{p-1} \left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) + 1 \right),$$

en utilisant la décomposition en éléments simples de $X^{2p} - 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. On commence par remarquer que le rapport $\dfrac{x^{2p} - 1}{(x-1)(x+1)}$ est toujours positif. On peut le vérifier car il est le produit de $p - 1$ trinômes du second degré toujours positifs d'après plus haut. On peut aussi dire que si $x \in]-1, 1[$, $x^{2p} - 1 < 0$ et $x^2 - 1 < 0$, donc le rapport de ces deux fonctions polynomiales est positif et que si $x \notin]-1, 1[$, $x^{2p} - 1 > 0$ et $x^2 - 1 > 0$, donc le rapport de ces deux fonctions polynomiales est encore positif. On peut donc composer par ln sans souci :

$$\ln\left(\frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1}\right) = \ln \prod_{k=1}^{p-1} \left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) + 1 \right) = \sum_{k=1}^{p-1} \ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) + 1 \right),$$

en utilisant le fait qu'un ln transforme un produit en une somme. Il reste à multiplier par $\frac{\pi}{p}$ de chaque côté :

$$\frac{\pi}{p} \ln\left(\frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1}\right) = \frac{\pi}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) + 1 \right).$$

Il reste à utiliser le résultat suivant (rappelé bien entendu dans le formulaire !) sur les sommes de Riemann : si g est une fonction continue sur $[a, b]$ et si p est un entier non nul, alors en posant pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $t_k = a + (b-a)\dfrac{k}{p}$, la quantité $\dfrac{b-a}{p} \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} g(t_k)$ tend, quand p tend vers $+\infty$, vers $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$.
Ici, on prend $a = 0$, $b = \pi$, $t_k = k\dfrac{\pi}{p}$ et $g(t) = \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$. Ce qui donne :

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{\pi}{p} \ln\left(\frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1}\right) = \lim_{p \to +\infty} \frac{\pi}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) + 1 \right),$$

et donc :

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{\pi}{p} \ln\left(\frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1}\right) = \int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos t + 1\right)\,dt.$$

Si l'on suppose $|x| < 1$, on écrit :

$$\frac{\pi}{p} \ln\left(\frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1}\right) = \frac{\pi}{p} \ln\left(\frac{1 - x^{2p}}{1 - x^2}\right) = \frac{\pi}{p}\left[\ln\left(1 - x^{2p}\right) - \ln\left(1 - x^2\right)\right].$$

Comme $\ln(1-x^{2p}) \sim -x^{2p}$, quand $p \to +\infty$ et comme $\dfrac{x^{2p}}{p}$ tend vers 0, par croissances comparées, $I = 0$.

Si l'on suppose maintenant $|x| > 1$, la quantité $\dfrac{x^{2p}-1}{x^2-1}$ est équivalente à x^{2p-2} quand p tend vers $+\infty$. Donc :

$$\frac{\pi}{p} \ln\left(\frac{x^{2p}-1}{x^2-1}\right) \sim \frac{\pi}{p} \ln\left(x^{2p-2}\right) = \frac{(2p-2)\pi}{p} \ln|x|,$$

et cette dernière quantité est équivalente à $2\pi \ln|x|$, quand p tend vers $+\infty$.
On peut conclure :

$$\boxed{I = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 2\pi \ln|x| & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on trouve les racines $n^{\text{èmes}}$ de $\omega \in \mathbb{C}^\star$.
Si $\omega = re^{i\theta}$, où $r > 0$, on pose $z = \rho e^{i\phi}$ et on écrit que $z^n = \omega$. On en déduit que $\rho = r^{\frac{1}{n}}$ et que $n\phi = \theta + 2k\pi$, avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

> Rapport du jury Mines-Telecom 2016
>
> Le cours de première année est souvent très mal connu, par exemple celui sur les nombres complexes et la trigonométrie.

♡ Il faut se souvenir de l'égalité $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = \left(x - e^{i\theta}\right)\left(x - e^{-i\theta}\right)$, pour tout couple de réels (x, θ).

♡ Il faut se souvenir que si z est racine d'un polynôme réel alors $\bar{z}$ est aussi une racine de ce polynôme.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on met sous forme irréductible un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$.

i. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on cherche les racines de P (en utilisant le cours du chapitre sur les nombres complexes : on peut aussi, par exemple, par un changement de variable, se ramener à un degré plus simple) et on écrit P directement sous sa forme scindé.

ii. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut commencer par chercher les racines dans $\mathbb{C}$, trier les racines réelles et celles non réelles puis associer ensemble les couples de racines conjuguées $(\alpha, \bar{\alpha})$. On effectue tous les produits $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$. On obtient alors un produit de polynômes irréductibles du premier degré et du second degré avec un discriminant < 0.

iii. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si le degré de P n'est pas trop grand, on peut tenter des identifications en devinant en partie les facteurs irréductibles.

iv. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si la forme du polynôme s'y prête, on peut utiliser des identités remarquables.

> Rapport du jury CCP, filière PC 2009
>
> Les candidats ont de réelles difficultés avec les polynômes, les notions de base du programme n'étant pas maîtrisées. Cela s'est révélé fort pénalisant sur cette session.

♡ Il faut se souvenir qu'un polynôme P de degré n qui admet n racines (distinctes ou non) z_k, pour k variant de 0 à $n-1$, s'écrit de façon scindé sous forme d'un produit du type $\alpha \prod_{k=0}^{n-1}(X - z_k)$ et que $\alpha = 1$ si et seulement si P est unitaire.

♡ Il faut se souvenir que si une somme du type $\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers l'infini alors il est intéressant de faire apparaître $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ qui pourra par contre, avoir une limite finie (et c'est là que les sommes de Riemann arrivent, voir le formulaire).

♡ Il faut se souvenir du fait que l'écriture $\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ peut être valable sans que $\ln(f(x))$ et $\ln(g(x))$ ne le soient (on peut avoir $f(x) < 0$ et $g(x) < 0$).
Dans ce cas, il faut écrire : $\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \ln(-f(x)) - \ln(-g(x))$.

♡ Il faut se souvenir des équivalents usuels et de la façon de les utiliser correctement. Ainsi, $\ln(1-u) \sim u$, à la condition que u tende vers 0. C'est ainsi le cas si l'on pose $u = x^p$, avec $|x| < 1$ et $p \to +\infty$.

Formulaire

• On appelle **racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité** tout complexe z vérifiant $z^n = 1$.
L'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est noté $\mathcal{U}_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Notons pour $k \in \mathbb{Z}$, $z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$. Alors :

$$\mathcal{U}_n = \{z_k;\ k \in \mathbb{Z}\} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}.$$

Exemples : $\mathcal{U}_1 = \{1\}$, $\mathcal{U}_2 = \{-1,\ 1\}$, $\mathcal{U}_3 = \{1,\ j,\ j^2\}$, $\mathcal{U}_4 = \{1,\ i,\ -1,\ -i\}$, où j est le complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

• $P \in \mathbb{K}[X]$ est **scindé** sur $\mathbb{K}$ si et seulement s'il s'écrit comme un produit de polynômes tous de degré 1.

• Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ alors P est **irréductible** dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si $\deg P \geqslant 1$ et si $P = AB$ avec A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ alors nécessairement A ou B est un polynôme constant. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg P > 1$ alors P n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$.

• **Théorème de d'Alembert-Gauss.**
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 est scindé dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, il existe a complexe non nul, p un entier non nul , $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{C}^p$, $(r_1, ..., r_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que :

$$P = a \prod_{k=1}^{p} (X - x_k)^{r_k}.$$

> Rapport du jury E3A, toutes filières (hors TPC) 2016
>
> La factorisation de polynômes est devenue très compliquée pour beaucoup de candidats.

• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant de coefficient dominant a. Il existe alors un couple unique $(A,\, B)$ de polynômes unitaires, où A est scindé sur $\mathbb{R}$ ou constant et B sans racine réelle tel que : $P = aAB$.
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :

les polynômes de degré 1 ;

les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

• Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. En partageant l'intervalle $[a,\, b]$ en n intervalles de longueurs égales à $\dfrac{b-a}{n}$, on obtient les $n+1$ points de subdivision : $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, où $k \in [\![0, n]\!]$. Considérons alors les deux fonctions en escalier φ et ψ de subdivision subordonnée commune : $\sigma = (a,\, a_1,\, ...,\, a_{n-1},\, b)$ telles que :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall\, x \in [a_k,\, a_{k+1}[\,,\ \varphi(x) = f(a_k) \text{ et } \psi(x) = f(a_{k+1}).$$

Ces fonctions en escalier approchent f et dans le cas (courant) où f est strictement monotone sur $[a,\, b]$, ces deux fonctions encadrent f. Les intégrales de ces deux fonctions en escalier sont **les sommes de Riemann de** f sur $[a,\, b]$ par rapport à σ. Il s'agit des quantités :

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right),\ J_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Les suites composées des sommes de Riemann (I_n) et (J_n) convergent vers la même limite qui est $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \dfrac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$.