Jour n^{o}1

Exercice 1.1 — Concours Centrale-Supélec

On donne une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ et on note :

$$A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left[\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right].$$

1) Montrer que $P(A) = \lim\limits_{k\to+\infty} P\left(\bigcup\limits_{n=k}^{+\infty} A_n\right)$.

2) On suppose ici que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(A_n)$ est convergente.

a) Déterminer $P(A)$.

b) Déterminer $P(B)$, où B est l'ensemble des ω appartenant à une infinité de A_n.

3) On suppose ici que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(A_n)$ est divergente et que les événements A_n sont mutuellement indépendants. Déterminer $P(A)$, en s'intéressant à $P(\overline{A})$.
Indication. On pourra utiliser l'inégalité : pour tout $x \geqslant 0$, $1 - x \leqslant e^{-x}$.

Exercice 1.2 — Concours Centrale-Supélec

Pour cette épreuve, on dispose d'un ordinateur muni du langage Python et de l'environnement Pyzo.

1) Avec Python, tracer $f : (x, y) \mapsto \sum\limits_{k=0}^{4} (k^4 - xk^3 - y)^2$ sur $[0, 10] \times [-20, 0]$.
Observer l'existence d'un minimum de F et affiner l'intervalle.

2) Montrer que $\langle P, Q\rangle = \sum\limits_{k=0}^{4} P(k)Q(k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.

3) En déduire l'existence de $A = \inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \sum\limits_{k=0}^{4} (k^4 - xk^3 - y)^2$ et le calculer (avec Python).

Énoncé

On donne une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ et on note :

$$A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left[\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right].$$

1) Montrer que $P(A) = \lim\limits_{k\to+\infty} P\left(\bigcup\limits_{n=k}^{+\infty} A_n\right)$.

2) On suppose ici que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(A_n)$ est convergente.

a) Déterminer $P(A)$.

b) Déterminer $P(B)$, où B est l'ensemble des ω appartenant à une infinité de A_n.

3) On suppose ici que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} P(A_n)$ est divergente et que les événements A_n sont mutuellement indépendants. Déterminer $P(A)$, en s'intéressant à $P(\overline{A})$.
Indication. On pourra utiliser l'inégalité : pour tout $x \geqslant 0$, $1 - x \leqslant e^{-x}$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice très ancré sur le cours de probabilités, en particulier sur la notion d'événement dans une tribu. On introduit des unions ou des intersections infinies d'événements. Il s'agit de réviser ici en particulier le théorème dit de continuité décroissante et celui dit de continuité croissante. L'élément clé est d'introduire des suites croissantes d'événements ou des suites décroissantes d'événements. Le résultat final de cet exercice porte le nom de loi du zéro-un de Borel. Ce type d'exercice requiert plusieurs compétences rappelées très bien dans cet extrait de rapport de jury :

> Rapport du jury Concours Centrale-Supélec 2015
>
> L'absence de préparation à l'épreuve de Mathématiques I permet d'évaluer plus spécifiquement les compétences liées à un oral de mathématiques :
> - autonomie ;
> - connaissance et maîtrise du cours ;
> - rigueur ;
> - vivacité et réactivité.

1) Ici, on doit déterminer une limite d'une suite de probabilités. On pourra poser, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k = \bigcup\limits_{n=k}^{+\infty} A_n$.

$\hookrightarrow$ On déterminera une inclusion entre B_{k+1} et B_k. Puis, on devinera la partie du cours sur les probabilités qu'il faut utiliser.

Rapport du jury Concours Centrale-Supélec 2015

En probabilités, les emplois des théorèmes de limite croissante ou décroissante doivent être plus rigoureux.

2) a) On se place ici sous l'hypothèse que la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ est convergente.

On doit calculer $P(A)$, toujours en utilisant son cours (ici la sous-additivité).

$\hookrightarrow$ Si une série converge, la suite de ses restes tend vers 0. À utiliser

b) C'est probablement la question la plus délicate. On introduit B qui est l'ensemble des ω appartenant à une infinité de A_n. L'idée est de montrer que $A = B$ et nous pourrons alors bien entendu conclure, (à condition d'avoir traité la question précédente).

$\hookrightarrow$ Procédez à une double inclusion car ce sera beaucoup plus rigoureux.

3) Ici l'on suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ est divergente. De plus, on suppose aussi que les événements (A_n) sont mutuellement indépendants. Attention, pour appliquer le cours, $P\left(\bigcap_{n\in J} A_n\right) = \prod_{n\in J} P(A_n)$ n'est valable que si J est **une partie finie de** $\mathbb{N}$.

Pour démarrer, on pose comme à la question **1)** : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$.

On introduit ensuite $\overline{A}$ comme indiqué dans l'énoncé. De façon naturelle, on introduit ensuite pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C_k = \bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n}$, en utilisant les extensions des lois de Morgan : soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille infinie d'événements de $\mathcal{A}$. Alors :

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{E_n} \text{ et } \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} E_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{E_n}.$$

Il est bon de savoir montrer ces deux relations (ou au moins la première) car elles n'apparaissent pas dans le programme officiel.

Ceci fait, la première étape de la question est de déterminer $\lim_{k\to+\infty} P(C_k)$ en fonction de $P(\overline{A})$ puis on compare $P\left(\bigcap_{n=k}^{N} \overline{A_n}\right)$ pour $N \geqslant k$ à $P(C_k)$.

La seconde étape est de calculer $P(C_k)$ et donc $P(\overline{A})$ puis $P(A)$. C'est à ce niveau que l'on utilise les deux principales hypothèses de l'énoncé et l'indication (qui n'est intuitive que chez les meilleurs d'entre vous, on le conviendra).

Rapport du jury Concours Centrale-Supélec 2016

En probabilités, il est nécessaire de bien comprendre la notion d'indépendance entre des événements ou des variables aléatoires.

$\hookrightarrow$ Typiquement, pour faire ce type de question placée en fin d'énoncé, il faut réflechir un peu tout seul puis regarder le cheminement proposé ci-dessus et essayer ensuite d'y arriver. Cela correspond très bien à ce qui peut se passer le jour de l'oral. On vous donne des coups de pouce jusqu'à l'obtention du résultat (ou de l'arrêt brutal de la planche car le temps est terminé, ce qui arrive malheureusement trop souvent). Au fond, ce qui importe c'est moins de tout faire que de prouver à l'examinateur que l'on a les quatre compétences (autonomie, connaissance du cours, rigueur, réactivité) rappelées en début d'analyse.

Corrigé

1) Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$. Alors :

$$\bigcup_{n=k+1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n \Rightarrow B_{k+1} \subset B_k.$$

La suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

D'après la continuité décroissante : $P\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \lim_{k\to+\infty} P(B_k)$.

Comme $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left[\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right] = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$,

$$\boxed{P(A) = \lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right).}$$

2) On suppose ici que la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ est convergente.

a) Pour tout k fixé dans $\mathbb{N}$, d'après le cours : $P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} P(A_n)$.

Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ est convergente, la suite des restes $\sum_{n=k}^{+\infty} P(A_n)$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

Finalement, $P(A) = \lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right) \leqslant 0$. On peut conclure car une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1.

$$\boxed{P(A) = 0.}$$

b) B est l'ensemble des ω appartenant à une infinité de A_n. Nous allons montrer que $A = B$ et nous pourrons alors conclure. Pour cela, on va faire une double inclusion.

Montrons $A \subset B$.

Soit $\omega \in A$, alors $\omega \in \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$ pour tout k.

Prenons $k = 0$. Alors il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_{m_0}$.

Prenons ensuite $k = m_0 + 1$. Comme $\omega \in \bigcup_{n=m_0+1}^{+\infty} A_n$, il existe $m_1 > m_0$ tel que $\omega \in A_{m_1}$. On peut ainsi construire une suite strictement croissante d'entiers $(m_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tel que $\omega \in A_{m_p}$.

En effet, supposons qu'il existe $m_p \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_{m_p}$.

Prenons $k = m_p + 1$. Comme $\omega \in \bigcup_{n=m_p+1}^{+\infty} A_n$, il existe $m_{p+1} > m_p$ tel que $\omega \in A_{m_{p+1}}$.
Finalement, l'élément ω de A appartient donc à une infinité de A_n.

Montrons $B \subset A$.

Soit $\omega \in B$, alors $\omega \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_{n_p}$, où $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement croissante.

Déjà, $\omega \in A_{n_0}$ donc $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ car $n_0 \geqslant 0$. Puis $\omega \in A_{n_1}$ donc $\omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ car $n_1 \geqslant 1$. (En effet, $n_1 > n_0 \geqslant 0$.) De façon générale, pour tout entier p, $\omega \in A_{n_p}$ donc $\omega \in \bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n$ car $n_p \geqslant p$. Finalement, $\omega \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \left[\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right]$. Donc $\omega \in A$.
Il reste à conclure :

$$\boxed{P(B) = P(A) = 0.}$$

3) *Remarque*

Dans cette question, nous allons devoir appliquer les lois de Morgan. Attention, ici, on va devoir appliquer les lois de Morgan pour une famille infinie d'événements. Comme cette extension n'est pas explicitement écrite au programme officiel, nous devons prouver que cette extension est licite. L'examinateur risque de poser la question. En tout cas, on a dit que le corrigé doit être très détaillé.
Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille infinie d'événements de $\mathcal{A}$.

Montrons alors que : $\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{E_n}$ et que : $\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} E_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{E_n}$. On a :

$$\begin{aligned} x \in \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n} & \Leftrightarrow \quad x \notin \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n \\ & \Leftrightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, x \notin E_n \\ & \Leftrightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, x \in \overline{E_n} \\ & \Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{E_n} \end{aligned}$$

D'où l'égalité : $\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{E_n}$. Puis, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} E_n} & \Leftrightarrow \quad x \notin \bigcap_{n=0}^{+\infty} E_n \\ & \Leftrightarrow \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\, x \notin E_{n_0} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\, x \in \overline{E_{n_0}} \\ & \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{E_n} \end{aligned}$$

On obtient de même : $\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} E_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{E_n}$.

Ici, on a raisonné par équivalences car pour une fois c'est plus simple !

<u>1[re] *étape du développement de la question*</u>

On pose de nouveau comme à la question **1)** : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$.

Donc : $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$. On introduit ensuite $\overline{A}$ comme indiqué dans l'énoncé.

On va appliquer les lois de Morgan rappelées et démontrées plus haut.

D'après les lois de Morgan,

$$A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k \Rightarrow \overline{A} = \overline{\bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \overline{B_k}.$$

De même, $B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n \Rightarrow \overline{B_k} = \bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n}$.

Donc (en posant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C_k = \bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n}$) : $\overline{A} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n} \right) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C_k = \bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n} \subset C_{k+1} = \bigcap_{n=k+1}^{+\infty} \overline{A_n}$. Ainsi, (C_k) est croissante.

On applique le théorème de continuité croissante :

$$\lim_{k\to+\infty} P(C_k) = P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \right) = P(\overline{A}).$$

<u>2[e] *étape du développement de la question*</u>

Pour tout $N \geqslant k$, $\bigcap_{n=k}^{N} \overline{A_n}$ contient C_k. Donc :

$$\forall N \geqslant k,\ 0 \leqslant P(C_k) = P\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n} \right) \leqslant P\left(\bigcap_{n=k}^{N} \overline{A_n} \right).$$

Par indépendance mutuelle,

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{N} \overline{A_n} \right) = \prod_{n=k}^{N} P(\overline{A_n}) = \prod_{n=k}^{N} \left[1 - P(A_n) \right].$$

Il est temps d'utiliser l'indication de l'énoncé : $\forall x \geqslant 0,\ 1 - x \leqslant e^{-x}$. On a :

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{N} \overline{A_n} \right) \leqslant \prod_{n=k}^{N} e^{-P(A_n)} = \exp\left(-\sum_{n=k}^{N} P(A_n) \right).$$

Il reste à faire tendre N vers $+\infty$ et on sait que $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ est divergente.

$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=k}^{N} P(A_n) = +\infty$ (en effet, une série à termes positifs divergente a toutes ses sommes partielles qui tendent vers $+\infty$). On en déduit que $\lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=k}^{N} \overline{A_n}\right)$ tend vers 0 et donc $P(C_k) = 0$ pour tout entier k. On peut conclure : $P(\overline{A}) = 0$ et :

$$\boxed{P(A) = 1.}$$

<u>*Remarque*</u>

Pour être complet, il reste à montrer : $\forall x \geqslant 0,\ 1 - x \leqslant e^{-x}$. On peut poser $g : x \mapsto e^{-x} - 1 + x$, cette fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -e^{-x} + 1$. Cette quantité est positive sur $\mathbb{R}_+$. Donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $g(0) = 0$.
On peut conclure : $g(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que si une série numérique est convergente alors la suite de ses restes d'ordre n tend vers 0.

♡ Il faut se souvenir qu'une série à termes positifs divergente a toutes ses sommes partielles qui tendent vers $+\infty$.

♡ Il faut se souvenir que pour appliquer le théorème de continuité croissante (respectivement décroissante), il suffit d'introduire une suite croissante (respectivement décroissante) d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$.

♡ Il faut se souvenir que pour montrer que deux ensembles sont égaux, il faut en général faire une double inclusion et ne pas tenter de raisonner par équivalences, ce qui peut engendrer des raisonnements peu rigoureux, voire faux.
Par contre, ici, la preuve peut se faire par équivalences, ce qui est assez rare pour être souligné.

♡ Il faut se souvenir que la mutuelle indépendance s'applique pour des suites finies d'événements. Plus précisément, si les événements (A_n) sont des évenements mutuellement indépendants, $P\left(\bigcap_{n\in J} A_n\right) = \prod_{n\in J} P(A_n)$ n'est valable que si J est **une partie finie de** $\mathbb{N}$.

♡ Il faut se souvenir que dans le programme officiel, on ne dit pas grand chose sur les lois de Morgan. On connaît généralement les formules pour l'intersection ou la réunion de deux événements, c'est-à-dire que pour tout couple (A, B) d'événements d'une tribu donnée, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Le résultat peut s'étendre à une intersection ou une réunion infinie d'événements dans une tribu mais il est bon de connaître la démonstration pour le justifier (voir le corrigé question **3)**.

Formulaire

• *Propriétés principales des probabilités*

Si $A \in \mathcal{A}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. En conséquence, $P(\emptyset) = 0$.
Monotonie : Si $A \subset B$, $P(A) \leqslant P(B)$.
Si A et B sont deux événements de $\mathcal{A}$, alors :

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B).$$

• *Continuité croissante*

Pour toute suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{A}$ tels que :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ B_n \subset B_{n+1}$ alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$.

• *Continuité décroissante*

Pour toute suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{A}$ tels que :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} \subset B_n$ alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$.

• *Sous-additivité*

Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{A}$:

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

• *Indépendance d'événements*

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque : $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.
Dans ce cas, si, par exemple, $P(B) > 0$, alors $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$, ce qui signifie que la réalisation de B n'influe pas sur la probabilité de réalisation de A.
Réciproquement, si $P(B) > 0$ et si $P_B(A) = P(A)$, alors $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ et A et B sont indépendants.
On montre facilement que A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ ou $\overline{A}$ et B ou $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
Les événements d'une famille finie $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont :
- ***deux à deux indépendants*** lorsque :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \big(i \neq j \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\,P(A_j)\big)\,;$$

- ***mutuellement indépendants*** lorsque, pour toute partie J non vide de $[\![1,n]\!]$:

$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i).$$

Des événements mutuellement indépendants sont deux à deux indépendants, mais la réciproque est fausse lorsque leur nombre est supérieur ou égal à 3.