Chapitre 2

■ Ondes mécaniques ■

Les ordres de grandeur utiles

La corde vibrante

fil souple de TP (en coton) masse linéique ; tension célérité	$\mu = 1$ g.m^{-1}; T = 1 N (masse de 100 g) $c = \sqrt{T/\mu} = 32$ m.s^{-1}
corde de piano (en acier) masse linéique ; tension célérité	$\mu = 6$ g.m^{-1}; T = 800 N (sous 80 kg) $c = \sqrt{T/\mu} = 365$ m.s^{-1}

Le câble coaxial (idéal)

capacité linéique	$C \approx 4{,}4.10^{-11}$ F.m^{-1}
inductance linéique	$L \approx 2{,}5.10^{-7}$ H.m^{-1}
résistance caractéristique	$R_c = \sqrt{L/C} = 75\ \Omega$
célérité des signaux électriques	$1/\sqrt{LC} = c = 3.10^8$ m.s^{-1}

Le cours d'abord

■ La corde vibrante

1. Quelles sont les hypothèses physiques faites sur la corde vibrante ?

2. Définir la tension $\vec{T}(x,t)$ en un point de la corde sans raideur et donner ses caractéristiques. Pourquoi un élément de corde est-il équivalent à un système masse-ressort ? Qu'est-ce qui joue le rôle de force de rappel (un dessin peut aider) ?

3. Montrer comment les approximations faites au cours de l'étude d'une corde vibrante de masse linéique μ conduisent à une tension uniforme, en norme, le long de la corde, puis à l'équation de d'Alembert vérifiée par l'élongation $u(x,t)$.

4. Donner et commenter l'expression littérale de la vitesse v de propagation d'un signal sur une corde vibrante, et en proposer une application numérique. Avec quelle autre vitesse s'agit-il de ne pas confondre cette célérité ? Ces ondes sont-elles longitudinales ou transversales ?

■ L'équation de d'Alembert et ses solutions

5. Rappeler et caractériser l'équation de d'Alembert à une dimension. Quelle est par homogénéité la dimension de la constante c qui y intervient ?

6. Dans quel cas retient-on une solution en onde progressive ? Rappeler et interpréter la solution générale d'une équation de d'Alembert, d'abord en coordonnées cartésiennes (à une puis trois dimensions), puis en coordonnées sphériques pour un problème à symétrie sphérique en donnant une interprétation de la variation de l'amplitude.

7. Pour une onde progressive sinusoïdale, quelle relation existe-t-il entre la longueur d'onde λ et la période T (ou la fréquence f) ? L'énoncer par une formule, puis à l'aide d'une phrase. Estimer la longueur d'onde sur une corde vibrante excitée à $100\ \text{Hz}$ par un électroaimant.

8. Dans quel cas retient-on une solution en onde stationnaire ? Quelle forme de solution choisit-on alors pour résoudre l'équation de d'Alembert ? Quelles sont les caractéristiques d'une telle onde ? Pour quelle raison apparaît-il des modes ? Rappeler la solution générale en ondes stationnaires ; quelle est sa période spatiale ? Quels arguments physiques permettent de déterminer les constantes a_n et b_n du développement en série de Fourier, c'est-à-dire du spectre sonore d'émission d'une corde ?

9. Pour une corde fixée aux deux bouts, quelle relation simple existe-t-il entre la longueur l de la corde et la longueur d'onde λ_n ? Dessiner et décrire spatialement et temporellement le mode $n = 3$.

10. Corde de Melde en régime sinusoïdal forcé

Quel type de solution convient-il de chercher pour une corde en régime forcé sous l'action d'une lame vibrante imposant à son extrémité $x = 0$ un mouvement oscillant transversal $a\cos\omega t$? Que vaut le terme d'amplitude de cette onde sachant que l'autre extrémité en $x = l$ est fixée ? Où sont les nœuds ?

Pour quelles pulsations d'excitation ω obtient-on des ventres d'amplitude maximale et que reconnaît-on ? Il est recommandé de faire le lien qualitativement avec un circuit LC en rappelant les deux significations physiques (en fonction de la nature du régime) de la pulsation $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

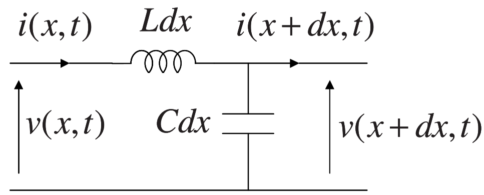
■ Le câble coaxial sans perte

Les questions **11.**, **12.**, **28.** et **29.** forment un ensemble sur l'étude du câble coaxial.

11. Cadre de travail et équations

Une ligne coaxiale présente une capacité linéique C (en F.m^{-1}) et une inductance linéique L (en H.m^{-1}) avec $LC = 1/c^2$ si elle est parfaite (expression établie à la question **43.** du chapitre **7)** où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Sur un tronçon de longueur dx, elle se modélise simplement par le schéma suivant :



a) Rappeler pourquoi la tension $v(x,t)$ et l'intensité du courant $i(x,t)$ sont des fonctions de l'abscisse x (en plus du temps t ce qui est habituel en régime variable) ; en déduire une justification de la taille du système étudié.

b) Établir les équations donnant $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial i}{\partial x}$ en fonction de $\frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial i}{\partial t}$, et montrer, en justifiant les approximations, que cette ligne (sans perte) conduit pour la tension $v(x,t)$ à une équation de d'Alembert.

Quelle est alors la célérité des signaux électriques qui s'y propagent ? Commentaire.

12. Régime sinusoïdal et impédance caractéristique

Dans la ligne est établi un régime sinusoïdal forcé de pulsation ω, avec $\underline{v}(x,t)=\underline{V}(x)\mathrm{e}^{j\omega t}$ et $\underline{i}(x,t)=\underline{I}(x)\mathrm{e}^{j\omega t}$ où $\underline{V}$ et $\underline{I}$ sont des fonctions complexes.

a) Calculer $\frac{d\underline{V}}{dx}$, $\frac{d\underline{I}}{dx}$ et $\frac{d^2\underline{V}}{dx^2}$ en fonction de $\underline{I}$ et $\underline{V}$.

b) Justifier la recherche de $\underline{V}$ sous la forme $\underline{V}(x)=V'\mathrm{e}^{-jkx}+V''\mathrm{e}^{jkx}$ avec $k=\frac{\omega}{c}$, et V' et V'' des constantes à interpréter.

c) En déduire $\underline{I}(x)$ en fonction de x et de $R_c=\sqrt{L/C}$, résistance caractéristique de la ligne.

AN : calculer R_c pour $L=0,25\ \mu\mathrm{H.m^{-1}}$ et $C=44\ \mathrm{pF.m^{-1}}$.

■ Dispersion ; absorption

13. Rappeler et interpréter l'expérience de Newton de la dispersion de la lumière blanche par un prisme. Faire un dessin en se limitant aux deux rayons rouge et bleu.

14. Comment pour une équation d'onde quelconque obtient-on la relation de dispersion ? Que se passe-t-il lorsque la relation de dispersion $k(\omega)$ n'est pas linéaire ? Lorsque la relation $k(\omega)$ est complexe ?

15. Définir les vitesses de phase et de groupe ; les illustrer sur la notion de paquets d'onde. Citer un exemple de chaîne dispersive.

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ Toujours faire un dessin d'un élément du système considéré (par exemple compris entre x et $x+dx$) et représenter les grandeurs qui interviennent sans oublier leurs variables. Ne pas hésiter à porter sur le même dessin les deux situations, l'une où le système est au repos, l'autre où il est en mouvement.

☐ Les grandeurs $u(x,t)$ qui représentent les phénomènes ondulatoires sont spatio-temporelles ; il convient donc de bien faire la distinction entre $u(x_0,t)$ qui, pour une corde vibrante par exemple, représente l'élongation d'un point x_0 de la corde en fonction du temps et $u(x,t_0)$ qui représente l'état de la corde entière à un instant t_0 fixé (comme une photographie).

☐ Ceci conduit naturellement à utiliser les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ (il faut éviter les dérivées droites, sauf par exemple pour $\dfrac{df}{dp}$ si $p=t-x/c$).

☐ Du fait que les grandeurs physiques ne sont pas uniformes sur un système macroscopique mais dépendent d'une variable spatiale, le système auquel on applique par exemple la relation fondamentale de la dynamique ne peut pas être de taille macroscopique, mais doit être de dimension mésoscopique (un élément de corde de longueur dx ou une tranche d'épaisseur dx). Leur masse est donc elle-même élémentaire et il convient donc de la noter dm (et non m !). Mais dx ne peut pas tendre vers 0 au risque de se retrouver dans un modèle microscopique.

☐ Attention à ne pas utiliser des notations différentes pour une même grandeur physique. Les tensions aux bornes d'un élément de corde de longueur dx ne doivent pas être notées $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$, mais $\vec{T}(x+dx)$ et $-\vec{T}(x)$ par action et réaction où le vecteur $\vec{T}(x)$ est défini comme la tension exercée par la partie de la corde située à droite de x sur la partie située à gauche de x (afin que sa projection sur Ox soit positive).

☐ L'obtention d'une équation d'onde suppose de ne pas garder les infiniment petits d'ordre supérieur ou égal à 2 ; un développement limité (Taylor à l'ordre 1) doit être justifié, si possible par des considérations numériques (même faites *a posteriori*) : ainsi, pour la corde, il faut $dx \ll \lambda$ où λ est la longueur d'onde. À noter qu'à des termes du premier ordre près, $v(x+dx,t)\,dx \approx v(x,t)\,dx$; en effet, dans l'écriture $v(x+dx,t)\,dx \approx \left(v(x,t)+dx\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)dx = v(x,t)\,dx + \dfrac{\partial v}{\partial x}(dx)^2$, le terme d'ordre deux n'est pas retenu.

- Il est conseillé d'écrire une équation de d'Alembert sous la forme « l'espace moins le temps égale… » afin que c^2, le carré de la célérité, intervienne dans la « position » suivante : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$.

- Dans la solution de l'équation de d'Alembert $u(x,t)=f(t-x/c)+g(t+x/c)$, bien distinguer au niveau de l'écriture $u(x,t)$ qui représente la grandeur physique (élongation, surpression,…) de f et g, les fonctions analytiques (sinus, exponentielles,…) qui représentent sa variation.

- Ne pas confondre la célérité des ondes ($c=\sqrt{T/\mu}$ par exemple sur une corde) avec la vitesse $v(x,t)=\partial u/\partial t$ de vibration d'un élément.

- La caractéristique essentielle d'une onde est sa fréquence (ne pas oublier de diviser par 2π lorsque l'énoncé donne la pulsation $\omega=2\pi f$) ; elle est conservée lorsque l'onde passe d'un milieu à un autre. En revanche, comme la célérité c change, il en est de même de $k=\omega/c=2\pi/\lambda$ et donc la longueur d'onde λ change d'un milieu à l'autre. En se souvenant que λ est la distance parcourue par l'onde pendant une période T, il apparaît clairement que λ augmente avec c.

- L'utilisation bien pratique de la notation complexe suppose de l'appliquer à des grandeurs linéaires (élongation, surpression,…) mais pas à des grandeurs quadratiques (densité d'énergie, puissance,…), car la partie réelle d'un produit n'est pas le produit des parties réelles ! Elle convient parfaitement pour une onde progressive sinusoïdale, mais il est plus prudent de l'éviter pour une onde stationnaire (le produit d'un sinus spatial par un sinus temporel).

- Le choix entre onde progressive et onde stationnaire est imposé par l'existence ou non de conditions aux limites. En espace « illimité », prendre une solution en onde progressive ; en espace « clos », prendre une solution en onde stationnaire, soit directement sous la forme d'un mode, soit par superposition de deux ondes progressives en sens opposé, l'onde retour étant engendrée par réflexion sur l'obstacle de l'onde aller.

- Les ondes stationnaires conduisent, par les conditions aux limites, à des « quantifications » du genre $\sin(kl)=0 \quad \Rightarrow \quad kl=n\pi$. Cette dernière écriture est à éviter car il est important d'indicer la quantité discrétisée (ce sont les conditions opératoires qui indiquent laquelle), par exemple en écrivant $k_n=n\pi/l$ afin de bien faire apparaître, lorsque l est fixée, la suite k_n de valeurs possibles pour k.

- ☐ L'équation de dispersion $k(\omega)$ est obtenue lorsqu'on injecte une solution $\underline{u}(x,t) = \underline{u}_0 \exp i(k(\omega)x - \omega t)$ donnée *a priori* dans une équation de propagation (ici $\partial/\partial x \equiv ik$ et $\partial/\partial t \equiv -i\omega$).
  Si la relation $k(\omega)$ n'est pas linéaire, alors la vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k$ dépend de ω et donc des ondes de fréquences différentes se propagent à des vitesse différentes : il y a dispersion et $v_g \neq v_\varphi$.
  Si l'équation d'onde comporte des dérivées d'ordre impair, alors la relation de dispersion et donc k lui-même sont complexes. Se souvenir que $\mathrm{Re}(k)$ est lié à la propagation de la phase et $\mathrm{Im}(k)$ à l'atténuation de l'amplitude.

- ☐ La détermination des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude à l'interface entre deux milieux suppose l'écriture de conditions de passage ; que les grandeurs soient continues ou discontinues, ces conditions doivent toujours être justifiées (y compris qualitativement ou par l'absurde). Bien écrire ces relations en $x = 0, \forall t$; si l'interface est en $x = l$, il est conseillé d'introduire la variable $x - l$.

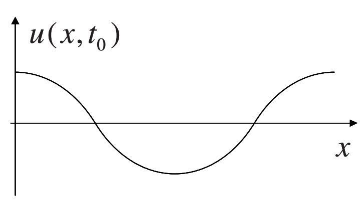
Applications directes du cours

■ Les solutions de l'équation de d'Alembert

16. Vérifier explicitement que $u(x,t) = f(t - x/c) + g(t + x/c)$ est bien solution de l'équation de d'Alembert et rappeler la signification physique des deux termes de cette solution.

17. Montrer comment la recherche d'une solution de l'équation de d'Alembert sous la forme d'une fonction de variables séparées $u(x,t) = f(x).g(t)$ conduit pour $f(x)$ et $g(t)$ à des fonctions trigonométriques.

18. L'onde représentée sur le graphe $u(x,t_0)$ ci-contre correspond-elle à une onde progressive ou une onde stationnaire ? Justifier soigneusement la réponse.



19. Montrer sur des exemples simples le lien qui existe entre les solutions en ondes planes progressives sinusoïdales (OPPS) et les solutions en ondes stationnaires à un mode (OS) de l'équation de d'Alembert.

■ La corde vibrante

20. Rappeler l'expression de la célérité c des ondes sur une corde et en vérifier l'homogénéité. Quelle masse faut-il accrocher à l'extrémité d'une corde de Melde de masse linéique $2{,}0\ \text{g.m}^{-1}$ pour que les ondes s'y propagent à la vitesse de $108\ \text{km.h}^{-1}$?

21. Calculer la célérité c des ondes sur une corde d'acier de masse volumique $\rho = 7{,}8.10^3\ \text{kg.m}^{-3}$, de diamètre $d = 1{,}0\ \text{mm}$, tendue par une tension $T = 800\ \text{N}$. Si la longueur de la corde est $l = 41\ \text{cm}$, quelle est la fréquence propre la plus basse émise ? Quelle note musicale reconnaît-on ?

22. Une corde de longueur l est fixée en ses extrémités, deux points de l'axe Ox d'abscisse $x = 0$ et $x = l$.
Montrer que la solution générale $y(x,t) = f(t - x/c) + g(t + x/c)$ est alors une fonction « doublement périodique » et interpréter la valeur de la période spatiale.

23. Pour bien distinguer le point de vue spatial du point de vue temporel pour les ondes stationnaires, représenter :
– pour le premier cas (spatial), les trois premiers modes, $n = 1$, 2 et 3,
– pour le second cas (temporel), le seul mode $n = 2$ à des quarts de période d'intervalle.

24. Une corde tendue est attachée à ses deux extrémités en O ($x = 0$) et en A ($x = l$) ; son mouvement est donné par $y(x,t) = b \sin kx . \sin \omega t$. À quelle condition sur k et ω la solution proposée convient-elle ? Déterminer les pulsations propres ω_n possibles. La corde est de masse volumique $3{,}9.10^3\ \text{kg.m}^{-3}$, de diamètre $0{,}30\ \text{mm}$, de longueur $64{,}5\ \text{cm}$ et tendue à $50\ \text{N}$; quelle est la fréquence f_1 du mode fondamental ?

25. Spectre sonore d'une corde frappée
La question **8.** a montré que la solution générale en ondes stationnaires pour une corde de longueur l fixée en ses deux extrémités ($x = 0$ et $x = l$) et pour laquelle la célérité est v, est une superposition de tous les modes :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi v t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi v t}{l} \right] \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Une corde de piano, dans sa position d'équilibre initiale $u(x, t = 0) = 0$, $\forall x$, est frappée par un petit marteau de largeur $e \ll l$ entre les abscisses $x = a$ et $x = a + e$.
On admet dans ces conditions que la vitesse initiale

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \quad \text{vaut} \quad \begin{cases} V \text{ pour } a < x < a + e \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

a) Trouver $u(x,t)$ par l'intermédiaire des a_n et b_n et commenter.

Rappel : $\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} \delta_{nm}$ où $\delta_{nm} = 0$ si $n \neq m$ et $\delta_{nm} = 1$ si $n = m$.

b) Comment est-il possible de supprimer le premier harmonique dissonant correspondant à $n = 7$ (voir à ce sujet la question **39.**) ?

26. Impédance caractéristique d'une corde

Une corde de très grande longueur se confond au repos avec l'axe Ox. À son extrémité $x=0$, on lui communique un mouvement transversal suivant l'axe Oy d'amplitude $y(0,t)=a\sin(\omega t)$.

a) Quel est à l'abscisse $x>0$, le déplacement $y(x,t)$ de la corde sachant que la célérité des ondes produites est c ?

b) La vitesse d'un point de la corde et la projection sur Oy de la tension (force exercée par un élément de droite sur un élément de gauche) sont notées $v(x,t)$ et $T_y(x,t)$.

Pour l'onde de la question a), montrer que le rapport $Z=T_y(x,t)/v(x,t)$ est une grandeur constante (c'est l'impédance de la corde) et que son expression est $Z=-\mu c$ où μ est la masse linéique de la corde. En quelle unité s'exprime Z ? Que devient ce rapport si l'onde progressive sinusoïdale se propage vers les x décroissants ?

27. Onde stationnaire sur une corde de Melde

Une corde de longueur finie (pour $x<l$) est attachée en $x=l$. L'onde aller est choisie sous la forme : $y_a(x,t)=A\sin(\omega t-kx+\varphi_a)$.

a) Sous quelle forme, *a priori*, doit-on prendre l'onde retour $y_r(x,t)$?

b) Traduire la condition aux limites en $x=l$, en donnant, avec commentaire, la nouvelle expression du déplacement $y(x,t)$ de la corde sous forme factorisée. Préciser la position des nœuds et commenter.

En réalité l'excitation provient d'un vibreur placé à l'origine et qui impose $y(0,t)=a\cos\omega t$.

c) En déduire l'amplitude $A(x)$ de l'onde résultante. Commentaire sur les ventres.

■ Le câble coaxial ; adaptation d'impédance

Ces questions sont la suite des questions **11.** et **12.**.

28. Impédance ramenée

À l'entrée de la ligne on note $\underline{V}(x=0)=\underline{V}_0$ et $\underline{I}(x=0)=\underline{I}_0$, et à la sortie $\underline{V}(x=l)=\underline{V}_l$ et $\underline{I}(x=l)=\underline{I}_l$.

a) Traduire ces conditions, d'abord en $x=l$, puis en $x=0$, et donner la matrice T telle que $\begin{pmatrix}\underline{V}_0\\ \underline{I}_0\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}\underline{V}_l\\ \underline{I}_l\end{pmatrix}$. Quel est son déterminant ? Que peut-on en déduire pour le câble ?

b) Exprimer l'impédance d'entrée $\underline{Z}_0$ en fonction de l'impédance de sortie $\underline{Z}_l$, de R_c et de $\tan kl$.