Chapitre 2
■ Les lois de l'électromagnétisme ■

Les ordres de grandeur utiles

Les constantes

perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}
permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}
célérité de la lumière dans le vide	$c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \approx 3{,}0.10^{8}$ m.s^{-1}
charge de l'électron	$-$ e avec e = $1{,}6.10^{-19}$ C
masse de l'électron	$m_e = 0{,}91.10^{-30}$ kg
charge ; masse du proton	e ; $m_p = 1{,}7.10^{-27}$ kg $\approx 1840\ m_e$

Conductivités électriques

Métaux : argent ; cuivre or ; fer	$\sigma_{Ag} = 6{,}3.10^{7}$ S.m^{-1} ; $\sigma_{Cu} = 5{,}9.10^{7}$ S.m^{-1} $\sigma_{Au} = 4{,}3.10^{7}$ S.m^{-1}; $\sigma_{Fe} = 1{,}0.10^{7}$ S.m^{-1}
Non métaux : eau distillée verre ; polystyrène	$\sigma \approx 10^{-9}$ S.m^{-1} $\sigma \approx 10^{-17}$ S.m^{-1} ; $\sigma \approx 10^{-20}$ S.m^{-1}

Le cuivre

masse molaire	M = 63,5 g.mol^{-1}
masse volumique	$\rho \approx 8{,}9.10^{3}$ kg.m^{-3}
densité volumique de porteurs (un e^- libre par atome de Cu)	$n = \rho N_A / M \approx 10^{29}$ m^{-3}
conductivité électrique	$\sigma = ne^2\tau / m \approx 5{,}8.10^{7}$ S.m^{-1}
temps moyen entre deux chocs	$\tau \approx 10^{-14}$ s

Le fil électrique

section s = 1 mm^2 ; courant I = 0,1 A densité de courant	j = I / s = 10^5 A.m^{-2}
densité volumique d'électrons libres	$n \approx 10^{29}$ m^{-3}
vitesse de dérive	v = j / ne $\approx$ 10 µm.s^{-1}

Un formulaire avec les opérateurs sur les champs est disponible au début du livre, page 8.

Le cours d'abord

Densités de charge et de courant

1. Pour quelle raison la charge électrique a-t-elle été introduite ? Rappeler la valeur numérique et l'unité de la charge élémentaire.

2. Rappeler la définition de la densité volumique de charge $\rho(M,t)$; pourquoi s'agit-il d'une grandeur mésoscopique ?

3. Décrire les vitesses d'agitation thermique et de dérive dans un conducteur.
À partir de quel raisonnement le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}(M,t)$ est-il défini ? Quelle est son unité ? Que vaut son flux à travers une surface ?

4. Comment s'exprime l'équation locale de conservation de la charge ? L'établir en coordonnées cartésiennes à une dimension, puis l'illustrer en régime stationnaire.

L'opérateur « gradient »

5. Qu'appelle-t-on champ scalaire $V(M)$? Donner des exemples courants.

6. On considère un point M de l'espace où un champ scalaire vaut $V(M)$; comment peut-on relier l'évolution dV de ce champ au petit déplacement vectoriel $\overrightarrow{dM}$ du point M ? Quelle interprétation en terme de champ peut-on donner de l'opérateur gradient ? Dans quel sens est-il dirigé ?
En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ V$ en coordonnées cartésiennes.

7. Si $V(M)$ est un « potentiel », comment définir les surfaces équipotentielles ? Comment est dirigé le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ V$ par rapport aux équipotentielles ?

Les équations de Maxwell et le champ électromagnétique

8. Comment décrit-on l'interaction entre particules chargées ? Rappeler l'expression de la force de Lorentz s'exerçant sur une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ à l'aide des champs électrique et magnétique.

9. Énoncer les équations de Maxwell avec leur nom ; donner la valeur numérique (avec unité et nom) des constantes qui y interviennent. Dire pour chacune des équations quel est le contenu physique. Pourquoi parle-t-on de champ électromagnétique ?

10. Les équations de Maxwell rendent-elles compte de la conservation de la charge ? Qu'appelle-t-on courant de déplacement ? Que permet-il de satisfaire ?

■ Énergie électromagnétique

11. Donner un exemple simple (issu de la mécanique) où la matière utilise l'énergie cédée par le champ. Quelle est l'expression générale de la densité volumique de puissance cédée par le champ électromagnétique à la matière ?

12. Citer des exemples simples (issus de l'électrocinétique) montrant que les champs possèdent de l'énergie. Comment en vient-on alors à définir la densité volumique d'énergie u et le vecteur de Poynting $\vec{R}$?

13. Établir la relation locale qui lie la densité volumique d'énergie u au vecteur de Poynting $\vec{R}$? Que traduit-elle ?

14. À quelles expressions de $\vec{R}$ et de u les équations de Maxwell conduisent-elles ? Commentaire.

■ Approximation des régimes quasi stationnaires

15. Expliquer simplement à l'aide d'un point P source et d'un point M d'observation en quoi consiste l'approximation des régimes quasi stationnaires.
À quelle condition sur $r = PM$ est-on en ARQS si les sources sont périodiques de période T ? Chiffrer cette inégalité dans le cas d'un circuit en TP et en déduire une évaluation de la fréquence maximale de travail.

16. Quel terme perd-on dans les équations de Maxwell lorsqu'elles sont écrites en ARQS ?

17. Comment s'écrit alors l'équation de conservation de la charge en ARQS ? Quelle loi connue sur le courant peut-on en déduire ? Quelle conséquence cela a-t-il sur l'évolution de l'intensité du courant le long d'un circuit ?

Conseils à suivre ☐ Erreurs à éviter

☐ L'électromagnétisme est une science fondamentalement vectorielle ; les flèches sur les vecteurs sont obligatoires et une égalité du genre « $\overrightarrow{vecteur} = scalaire$ » est à proscrire ; un effort est donc demandé sur l'exactitude et la précision des notations.

☐ En particulier le gradient est un vecteur ! Exemple : $\overrightarrow{\text{grad}}\, r = \vec{u}_r$

☐ Pour l'opérateur gradient, il est bon de connaître les expressions en coordonnées :

– cartésiennes : $\overrightarrow{\text{grad}}\ V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\ \vec{u}_x + \dfrac{\partial V}{\partial y}\ \vec{u}_y + \dfrac{\partial V}{\partial z}\ \vec{u}_z$

– cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}}\ V = \dfrac{\partial V}{\partial r}\ \vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\ \vec{u}_\theta + \dfrac{\partial V}{\partial z}\ \vec{u}_z$

– sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}\ V = \dfrac{\partial V}{\partial r}\ \vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\ \vec{u}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}\ \vec{u}_\varphi$

☐ Pour les opérateurs sur les champs ($\overrightarrow{\text{grad}}$, div, $\overrightarrow{\text{rot}}$ et Δ), il est conseillé de connaître (voir formulaire en début de livre) :
– les 4 formules sur les compositions d'opérateurs
– les 4 formules sur les champs composés
– les théorèmes de Stokes et d'Ostrogradsky
– les expressions des 4 opérateurs en coordonnées cartésiennes
– les expressions du gradient en coordonnées cylindriques et sphériques
L'opérateur Nabla $\vec{\nabla}$ est pratique pour se remémorer les définitions et certaines formules générales ; il est utile en coordonnées cartésiennes, mais ne doit *en aucun cas* être utilisé pour une divergence, un rotationnel ou un laplacien en coordonnées cylindriques ou sphériques (qui d'ailleurs ne sont pas à connaître).

☐ Le calcul d'un rotationnel ou d'une divergence en coordonnées cylindriques ou sphériques ne nécessite pas, en général, la connaissance des expressions des opérateurs dans ces coordonnées, mais se fait souvent facilement par les formules des champs composés (voir la question **27.**).

☐ Les opérateurs, comme dérivées par rapport à une longueur, sont « dimensionnés » : $\overrightarrow{\text{grad}}$, div et $\overrightarrow{\text{rot}}$ sont en m^{-1} et Δ en m^{-2}.
Par exemple $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$ a pour unité des $V.m^{-1}$.

☐ Il faut savoir reconnaître en $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$ un champ manifestement divergent (E_x dépend de x) et en $\vec{B} = B(x)\vec{u}_y$ un champ manifestement rotationnel (B_y dépend de x).

☐ Les équations de Maxwell sont des équations « locales », ce qui signifie qu'elles sont écrites en un point M donné de l'espace, contrairement aux formes « intégrales » vues ultérieurement.

☐ Il ne faut pas confondre la densité de charge totale ρ qui intervient dans l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div}\,\vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ avec la densité de charge mobile ρ_m qui intervient dans la définition de la densité de courant $\vec{j} = \rho_m \vec{v}$ (ou plus généralement $\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i$).

- ☐ Les équations de Maxwell font le lien entre le champ électromagnétique et les densités volumiques de charge ρ et de courant $\vec{j}$, à ne pas confondre avec les densités surfaciques de charge σ et de courant $\vec{j}_S$ qui apparaissent éventuellement dans les relations de passage des champs entre deux milieux.
- ☐ Attention aux unités : la densité *volumique* de courant $\vec{j}$ s'exprime en A.m^{-2} alors que la densité *surfacique* de courant $\vec{j}_S$ s'exprime en A.m^{-1} (il suffit de penser au moyen d'obtenir le courant I).
- ☐ Les expressions « quasi stationnaire » ou « quasi permanent » s'écrivent sans trait d'union !
- ☐ Le champ électrique est toujours orienté vers les potentiels décroissants ; on dit couramment « du $+$ vers le $-$ », conformément à $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$.
- ☐ Il est important de ne pas confondre la force magnétique de Lorentz $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ qui s'applique sur une particule chargée en mouvement avec la force de Laplace $I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$ qui s'exerce sur un élément de conducteur parcouru par un courant.
- ☐ En ARQS les champs magnétiques variables se déterminent par les mêmes expressions qu'en magnétostatique.

Applications directes du cours

■ Courant et conductivité

18. Quelle est la définition du vecteur densité de courant ? Quelle est son expression, y compris dans le cas de plusieurs types de porteurs ?

19. Le conducteur métallique est le cuivre, de masse volumique $\rho = 8{,}9.10^3$ kg.m^{-3} et de masse molaire $M = 63{,}5$ g.mol^{-1} dont on admet que chaque atome met en jeu un électron libre. Donner l'expression et la valeur numérique de la densité volumique d'électrons libres n.

20. Loi d'Ohm pour un conducteur et effet Joule
Dans le modèle de Drude, le métal est constitué d'un réseau fixe d'ions (par exemple Cu^+) avec des électrons libres de masse m, de vitesse d'ensemble $\vec{v}$ et responsables de la conduction électrique. Ces électrons « libres de se déplacer » sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$ subissent néanmoins des interactions ou chocs sur les failles du réseau, ce qui se traduit par une force de « frottement fluide » en $-m\vec{v}/\tau$ où le temps τ caractérise la durée moyenne entre deux chocs successifs.

a) De quel effet connu en électrocinétique cette « force de frottement » permet-elle de rendre compte ?

b) Établir dans ce modèle, en régime stationnaire, la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ et en déduire l'expression de la conductivité électrique σ du métal.
Rappeler pour le cuivre l'ordre de grandeur de σ (avec son unité), de sa densité volumique d'électrons libres n, et en déduire celle de τ.

c) Sachant que la relation entre le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel V est $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$, faire la démonstration du passage de $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ à $U = RI$ pour un conducteur filiforme de longueur l et de section s, et établir ainsi l'expression de la résistance électrique R d'un conducteur cylindrique à conduction axiale.

d) Montrer que la puissance volumique cédée par le champ au courant permet de retrouver la loi $P = RI^2 = U^2 / R$ donnant en électrocinétique la puissance reçue par un conducteur ohmique de résistance R. Sous quelle forme cette puissance est-elle dissipée ?

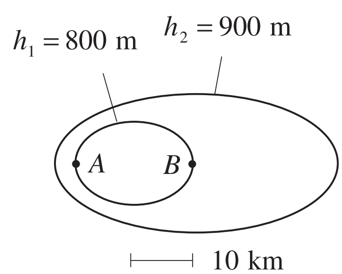
21. Quelle est l'unité du système international de la conductivité électrique ? Comment cette unité s'exprime-t-elle en fonction des quatre unités fondamentales m, kg, s et A ?

22. Estimer la résistance R d'un fil de cuivre de longueur $l = 40\ \text{cm}$ et de diamètre $d = 1\ \text{mm}$ utilisé en TP ; commentaire. Ce fil est parcouru par un courant électrique d'intensité $I = 100\ \text{mA}$. Estimer la vitesse moyenne des électrons de conduction (se servir des données numériques des questions **19.** et **20.**). Quelle est la différence de potentiel U à ses extrémités ? En déduire la norme E du champ électrique qui lui est appliqué.

■ Opérateurs sur les champs

23. Montrer qualitativement sur l'exemple de la pression atmosphérique le caractère fondamentalement vectoriel de $\overrightarrow{\text{grad}}\ P$. Que vaut $\overrightarrow{\text{grad}}\ P$ en statique des fluides ?

24. Sur un terrain donné à la surface de la Terre, qu'entend-on par « gradient d'altitude » ? Le schéma de cartographe ci-contre représente deux lignes de niveaux de même altitude, respectivement $h_1 = 800$ m et $h_2 = 900$ m ; expliquer la situation en portant aux points A et B le vecteur gradient d'altitude.



25. Les forces de Van der Waals entre molécules polarisées sont radiales, attractives et en $1/r^7$. Écrire l'expression de cette force et en déduire l'énergie potentielle dont elle dérive.

26. Que valent pour les vecteurs unitaires en coordonnées cartésiennes $\operatorname{div}\vec{u}_x$, $\operatorname{div}\vec{u}_y$ et $\operatorname{div}\vec{u}_z$ d'une part, et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_x$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_y$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_z$ d'autre part ?

27. On se place en coordonnées polaires (cylindriques à 2 dimensions).

a) Calculer séparément $\operatorname{div}\vec{u}_r$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_r$, et en déduire $\operatorname{div}\vec{u}_\theta$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u}_\theta$.

b) On considère deux champs de vecteurs, de même norme, l'un radial et l'autre orthoradial : $\vec{K}_1(M) = K(r)\vec{u}_r$ et $\vec{K}_2(M) = K(r)\vec{u}_\theta$.

Montrer que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{K}_1 = \vec{0}$, $\operatorname{div}\vec{K}_2 = 0$ et $\operatorname{div}\vec{K}_1 = (\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{K}_2).\vec{u}_z = \dfrac{K(r)}{r} + \dfrac{dK(r)}{dr}$.

Cette dernière expression peut-elle s'annuler ?

28. Pour un solide en rotation de vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe Oz dans le référentiel (R), rappeler l'expression du champ des vitesses $\vec{v}(M)_{(R)}$ pour un point M quelconque du solide. Montrer que $\vec{\omega} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$.

29. Dans l'équation de Maxwell-Gauss « modifiée » $\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 - \eta^2 V$ où V est le potentiel scalaire, en quelle unité s'exprime la constante η ?

■ Les équations de Maxwell

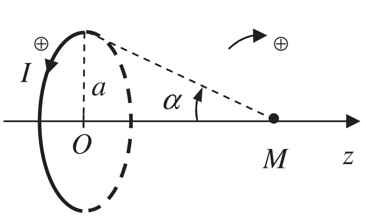
30. Qu'implique la linéarité des équations de Maxwell ?

31. Quelle est l'équation de Maxwell qui traduit l'induction ? Établir à partir de cette équation la loi de Faraday. Cette loi s'applique-t-elle aux deux cas d'induction ?

32. À quelles relations de passage sur les champs entre deux milieux conduisent les équations de Maxwell ?

■ Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

33. Le champ magnétique créé par une spire circulaire de centre O, d'axe Oz et de rayon a, parcourue par un courant d'intensité I constante est, en un point M de son axe :



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a}\sin^3\alpha\,\vec{u}_z$$

Comment s'écrit ce champ lorsque le courant $I(t)$ devient variable ?

34. Pourquoi une bobine d'inductance L parcourue par un courant d'intensité $i(t)$ est-elle le siège d'un phénomène d'induction ? Faire un bilan énergétique et montrer qu'elle emmagasine une énergie magnétique $U_m = \dfrac{1}{2}Li^2$.

35. Montrer sur l'exemple simple d'un câble coaxial d'antenne de $10\ \mathrm{m}$ de long utilisé avec une fréquence de porteuse TV de l'ordre de $500\ \mathrm{MHz}$, que la conservation de l'intensité du courant ne s'applique pas en dehors de l'ARQS.

36. Rassembler les équations de l'électromagnétisme dans un tableau à :
– 3 colonnes pour : Régime variable, ARQS, Régimes statiques.
– 2 lignes pour : les équations de Maxwell, l'équation de conservation de la charge.

Questions de réflexion ☐ Physique pratique

37. Comment, par une phrase, peut-on caractériser la « résistance électrique » d'un matériau ?

38. L'effet Joule qui accompagne le passage de tout courant à travers un matériau résistif est-il un effet souhaité ou néfaste ?

39. La section du fil électrique pour un éclairage ($I_{max} \approx 16\ \mathrm{A}$) est de 1,5 mm^2 et pour une cuisinière ($I_{max} \approx 32\ \mathrm{A}$) de 6 mm^2. Pourquoi cette différence ?

40. Comment la conductivité électrique des métaux varie-t-elle avec la température ? Et celle des semi-conducteurs ? Proposer dans chaque cas une modélisation microscopique qualitative.

41. Comment peut-on justifier que seule la force de Lorentz (et pas le poids) soit à prendre en compte pour décrire le mouvement d'une particule libre dans un champ magnétique par exemple ?

42. L'expression de la force magnétique subie par une particule chargée en mouvement, $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, fait apparaître la vitesse de la particule. Par rapport à quel référentiel cette vitesse est-elle définie ?

43. Pourquoi les champs magnétiques sont-ils si utiles dans les « accélérateurs » de particules ? Et pour quelle raison les électroaimants conventionnels ont-ils été remplacés par des aimants supraconducteurs ?

44. Dans un métal, un électron de conduction parcourt en moyenne une distance $d \approx 20\ \mathrm{nm}$ entre deux chocs séparés en moyenne d'un temps $\tau \approx 10^{-14}\ \mathrm{s}$. En déduire sa vitesse moyenne v_0 ; les notions de période et de rayon du cercle trajectoire conservent-elles dans ce cas encore un sens en présence d'un champ fort $B \approx 1\ \mathrm{T}$? Justifier.

45. Comment s'interprète en termes de champ l'opérateur divergence ?

46. Comment s'interprète en termes de champ l'opérateur rotationnel ?