

Montrer qu'une somme est directe



Quand on ne sait pas !

Soit $p \geq 2$ et F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

■ (Définition d'une somme directe)

$$\left[\begin{array}{l} \text{La somme } \sum_{k=1}^p F_k \text{ est directe} \\ \text{et l'on note } \bigoplus_{k=1}^p F_k \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} \text{La décomposition de tout vecteur de } \sum_{k=1}^p F_k \\ \text{sous la forme } \sum_{k=1}^p u_k, \text{ avec } u_k \in F_k, \text{ est unique} \end{array} \right]$$

On dit alors que les sous-espaces F_1, \dots, F_p sont en somme directe.

■ (Caractérisation 1)

$$\text{La somme } \sum_{k=1}^p F_k \text{ est directe} \iff \left[\begin{array}{l} \text{Si } 0_E = \sum_{k=1}^p u_k \text{ avec } u_k \in F_k, \\ \text{ALORS tous les } u_k \text{ sont nuls} \end{array} \right]$$

■ (Caractérisation 2)

$$\text{La somme } \sum_{k=1}^p F_k \text{ est directe} \iff \left[\begin{array}{l} \mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p) \text{ est une base de } \sum_{k=1}^p F_k \\ \text{où les } \mathcal{B}_k \text{ sont des bases de } F_k \end{array} \right]$$

■ (Caractérisation 3 - en dimension finie)

On suppose de plus que F_1, \dots, F_p sont de dimension finie.

$$\text{La somme } \sum_{k=1}^p F_k \text{ est directe} \iff \dim\left(\sum_{k=1}^p F_k\right) = \sum_{k=1}^p \dim F_k$$

■ (Cas particulier important : $p = 2$)

$$\text{La somme } F_1 + F_2 \text{ est directe} \iff F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$$

Que faire ?

- Pour montrer que les sous-espaces F_1, \dots, F_p sont en somme directe, on peut utiliser une des méthodes suivantes :
 - ▶ **Méthode 1 (en utilisant la caractérisation 1)**
on suppose que $u_1 + \dots + u_p = 0_E$ avec $u_k \in F_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, puis on exploite les propriétés des F_k pour montrer que tous les u_k sont nuls.
 - ▶ **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation 2)**
on commence par déterminer une base \mathcal{B}_k de F_k pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, puis on montre que la famille concaténée $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base de la somme $F_1 + \dots + F_p$.
 - ▶ **Méthode 3 (en utilisant la caractérisation 3 - valable en dimension finie)**
on montre que la dimension de la somme des F_k est égale à la somme des dimensions des F_k .
 - ▶ **Méthode 4 (uniquement si $p = 2$)**
on montre que l'intersection $F_1 \cap F_2$ est nulle.
Dans le cas où $p \geq 3$, ce résultat ne se généralise pas aisément (cf exercice 1).

Conseils

- En pratique, on privilégie les méthodes 1 et 4 pour montrer qu'une somme est directe. La méthode 4 est illustrée dans la fiche 3 sur les sous-espaces supplémentaires. Les méthodes 1 à 3 sont comparativement illustrées dans la rubrique *Exemple traité*.

Exemple traité

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose $F_k = \text{Vect}(X^k Q)$.
Montrer que les sous-espaces F_1, \dots, F_p sont en somme directe.

► SOLUTION

- **Méthode 1 (en utilisant la caractérisation 1)**
Soit $(R_1, \dots, R_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$ tel que $R_1 + \dots + R_p = 0_{\mathbb{K}[X]}$ (*).
Montrons que $R_1 = \dots = R_p = 0_{\mathbb{K}[X]}$.
Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, comme $R_k \in F_k$, il existe un scalaire λ_k tel que $R_k = \lambda_k(X^k Q)$.
On en déduit alors les équivalences suivantes :

$$(*) \iff \lambda_1 X Q + \lambda_2 X^2 Q + \dots + \lambda_p X^p Q = 0_{\mathbb{K}[X]} \iff_{Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}} \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \dots + \lambda_p X^p = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

Or la famille $(X^k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ est libre, donc tous les λ_k sont nuls, a fortiori les R_k aussi.

- **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation 2)**
Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la famille $\mathcal{B}_k = (X^k Q)$ est génératrice de F_k et est libre (car

constituée d'un seul vecteur non nul), donc est une base de F_k . Par ailleurs,

$$\sum_{k=1}^p F_k = \sum_{k=1}^p \text{Vect}(X^k Q) = \text{Vect}((X^k Q)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket})$$

La famille concaténée $\mathcal{B} = (X^k Q)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ est génératrice de $F_1 + \dots + F_p$ et est libre (car constituée de polynômes non nuls de degrés échelonnés), donc est bien une base de $F_1 + \dots + F_p$.

■ **Méthode 3 (en utilisant la caractérisation 3 - valable en dimension finie)**

Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\dim F_k = \text{rg}(X^k Q) = 1$ (car Q est non nul). Par ailleurs,

$$\sum_{k=1}^p F_k = \sum_{k=1}^p \text{Vect}(X^k Q) = \text{Vect}((X^k Q)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}), \text{ d'où : } \dim\left(\sum_{k=1}^p F_k\right) = \text{rg}((X^k Q)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket})$$

Or la famille $(X^k Q)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ est constituée de polynômes non nuls de degrés échelonnés donc est libre, d'où :

$$\dim\left(\sum_{k=1}^p F_k\right) = \text{rg}((X^k Q)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}) = \text{Card}((X^k Q)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}) = p = \sum_{k=1}^p \dim F_k$$

Exercices

EXERCICE 1.1

Soit $p \geq 3$ et F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

- 1 On suppose que $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, $F_1 \cap F_3 = \{0_E\}$ et $F_2 \cap F_3 = \{0_E\}$.
Les sous-espaces F_1 , F_2 et F_3 sont-ils nécessairement en somme directe?
- 2 Montrer l'équivalence suivante :

$$\text{la somme } \sum_{k=1}^p F_k \text{ est directe} \iff \forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \left(\sum_{i=1}^k F_i\right) \cap F_{k+1} = \{0_E\}$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 1.1

- 1 Considérer trois droites judicieusement choisies de $E = \mathbb{R}^3$.
- 2 Utiliser la méthode 2 pour l'implication \Leftarrow .

EXERCICE 1.1

1 Considérons trois droites coplanaires et deux à deux distinctes de $E = \mathbb{R}^3$.

$$F_1 = \text{Vect}((1, 0, 0)) \quad \text{et} \quad F_2 = \text{Vect}((0, 1, 0)) \quad \text{et} \quad F_3 = \text{Vect}((1, 1, 0))$$

Ces trois espaces sont bien deux à deux en somme directe (car d'intersection deux à deux nulle). Par contre, ils ne sont pas en somme directe. En effet :

$$0_{\mathbb{R}^3} = \underbrace{(-1, 0, 0)}_{\in F_1} + \underbrace{(0, -1, 0)}_{\in F_2} + \underbrace{(1, 1, 0)}_{\in F_3}$$

Ainsi, des sous-espaces qui sont deux à deux d'intersection nulle ne sont pas nécessairement en somme directe.

2 Montrons la double implication :

\Rightarrow Supposons que la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe.

Soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. Montrons l'égalité ensembliste demandée.

\supseteq Cette inclusion est toujours vraie car une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre 0_E .

\subseteq Soit $u \in \left(\sum_{i=1}^k F_i\right) \cap F_{k+1}$ i.e. $\begin{cases} \exists (u_1, \dots, u_k) \in F_1 \times \dots \times F_k, u = u_1 + \dots + u_k \\ u \in F_{k+1} \end{cases}$

On en déduit l'égalité vectorielle suivante :

$$\underbrace{u_1 + \dots + u_k}_{\in F_1} + \underbrace{(-u)}_{\in F_{k+1}} + \underbrace{0_E}_{\in F_{k+2}} + \dots + \underbrace{0_E}_{\in F_p} = 0_E$$

Or la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe, d'où $u_1 = \dots = u_k = -u = 0_E$.
En particulier, $u = 0_E$.

\Leftarrow Supposons $\left(\sum_{i=1}^k F_i\right) \cap F_{k+1} = \{0_E\}$ pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$.

Montrons que la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe.

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$ tel que $u_1 + \dots + u_p = 0_E$.

On a alors l'équivalence suivante :

$$u_1 + \dots + u_p = 0_E \iff \underbrace{u_1 + \dots + u_{p-1}}_{\in F_1 + \dots + F_{p-1}} = \underbrace{-u_p}_{\in F_p}$$

D'où $u_1 + \dots + u_{p-1} = -u_p \in (F_1 + \dots + F_{p-1}) \cap F_p = \{0_E\}$, et on en déduit alors que $u_1 + \dots + u_{p-1} = u_p = 0_E$.

Sachant que $u_1 + \dots + u_{p-1} = 0_E$ et $(F_1 + \dots + F_{p-2}) \cap F_{p-1} = \{0_E\}$, on montre par un raisonnement analogue au précédent que $u_{p-1} = 0_E$.

De proche en proche, on montre que tous les u_k sont nuls.

Ainsi, on a bien montré l'équivalence souhaitée.

Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en dimension quelconque



Quand on ne sait pas !

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

■ (Définition de la supplémentarité)

[F et G sont supplémentaires dans E]



[$E = F \oplus G$, c'est-à-dire tout vecteur $u \in E$
se décompose de manière unique comme la somme
d'un vecteur u_F de F et d'un vecteur u_G de G]

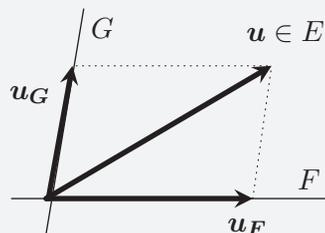


Figure illustrative

On dit aussi que F est $\boxed{\text{UN}}$ supplémentaire de G dans E ou que G est $\boxed{\text{UN}}$ supplémentaire de F dans E .

■ (Caractérisation de la supplémentarité)

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G & \leftarrow \text{garantit l'existence d'une décomposition} \\ F \cap G = \{0_E\} & \leftarrow \text{garantit son unicité sous réserve d'existence} \end{cases}$$

■ (Supplémentarité des éléments caractéristiques d'un projecteur/d'une symétrie)

Soit p et s des endomorphismes de E .

▶ Si p est un projecteur de E , ALORS : $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

▶ Si s est une symétrie de E , ALORS : $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

- Pour montrer que $E = F \oplus G$ en dimension quelconque, on peut suivre une des méthodes suivantes énoncées par ordre de praticité :

▶ **Méthode 1 (en utilisant la définition)**

on procède par analyse-synthèse dont on rappelle le principe et la rédaction :

- *Analyse (on suppose l'existence d'une décomposition et on montre l'unicité).*

Soit $u \in E$. On suppose que $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Raisonnement qui aboutit} \\ \text{à un unique couple } (u_F, u_G) \end{array} \right]$$

À l'issue de l'analyse, on trouve un unique couple (u_F, u_G) qui est CANDIDAT SOLUTION pour une telle décomposition.

- *Synthèse (on montre l'existence d'une décomposition).*

On vérifie que l'unique couple candidat solution trouvé est bien solution, c'est-à-dire $u_F \in F$, $u_G \in G$ et $u_F + u_G = u$.

▶ **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation)**

on intuite l'existence d'une décomposition de $u \in E$ comme somme d'un vecteur u_F de F et d'un vecteur u_G de G , puis on montre l'unicité de cette décomposition en montrant que $F \cap G = \{0_E\}$, toute la difficulté résidant alors dans l'intuition de cette décomposition.

▶ **Méthode 3 (en utilisant les propriétés des projecteurs et symétries)**

on montre que F et G sont les éléments caractéristiques d'un certain projecteur p ou d'une certaine symétrie s à intuire, toute la difficulté résidant alors dans l'intuition du projecteur ou de la symétrie.

EXEMPLE 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

▶ **SOLUTION**

Posons $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $G = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

On considère l'application $s : E \rightarrow E$ définie par :

$$\forall M \in E, s(M) = M^t$$

On montre aisément que s est un endomorphisme de E et $s^2 = \text{Id}_E$. Donc s est une symétrie de E , et on déduit alors que :

$$E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$$

Or on a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = \{M \in E, (s - \text{Id}_E)(M) = 0_E\} = \{M \in E, M^t = M\} = F$$

$$\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = \{M \in E, (s + \text{Id}_E)(M) = 0_E\} = \{M \in E, M^t = -M\} = G$$

Ainsi, on a bien montré que $E = F \oplus G$.

Conseils

- Ne pas hésiter à identifier les espaces E , F et G qui entrent en jeu et à préciser la nature des objets manipulés (uplets, polynômes, matrices, etc . . .).
- Les méthodes présentées dans cette fiche sont valables en dimension quelconque, a fortiori en dimension finie.

Exemple traité

On note respectivement \mathcal{P} et \mathcal{I} les sous-espaces vectoriels des fonctions paires et impaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

► SOLUTION

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrons que f se décompose de manière unique sous la forme :

$$f = g + h \quad \text{avec } g \text{ paire et } h \text{ impaire}$$

- *Analyse.* Supposons qu'il existe un couple (g, h) solution, c'est-à-dire vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} g \text{ est paire} \\ h \text{ est impaire} \\ f = g + h \end{array} \right., \quad \text{c'est-à-dire : } \left\{ \begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R}, & g(-x) = g(x) & (i) \\ \forall x \in \mathbb{R}, & h(-x) = -h(x) & (ii) \\ \forall x \in \mathbb{R}, & f(x) = g(x) + h(x) & (iii) \end{array} \right.$$

Cherchons des conditions nécessaires sur le couple (g, h) .

Soit $x \in \mathbb{R}$. Cherchons des conditions nécessaires sur le couple $(g(x), h(x))$.

On a en particulier le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) \end{array} \right. \begin{array}{l} \xLeftrightarrow{\text{par (i) et (ii)}} \\ \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{array} \right. \\ \begin{array}{l} \xleftarrow{\text{par (iii)}} \\ \xleftarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(x) + f(-x) = 2g(x) \end{array} \right.$$

Après calculs, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \\ g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array} \right\}$ ces expressions déterminent un unique couple (g, h)

SI il existe un couple (g, h) solution du problème, ALORS nécessairement il est unique et est composé des fonctions g et h définies par :

$$g : \left. \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array} \right\} \text{ et } \left. \begin{array}{l} h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array} \right\}$$

- *Synthèse.* Vérifions que le couple (g, h) obtenu à l'issue de l'analyse est bien solution du problème, c'est-à-dire vérifie :

$$\begin{cases} g \text{ est paire} & (i') \\ h \text{ est impaire} & (ii') \\ f = g + h & (iii') \end{cases}$$

► La condition (i') est bien vérifiée, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$$

► La condition (ii') est bien vérifiée, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x)$$

► La condition (iii') est bien vérifiée, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

Ainsi, on a bien montré que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Exercices

EXERCICE 2.1

On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $E = \mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + 2z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((-1, -2, 1)).$$

- 1 Montrer que $E = F \oplus G$.
- 2 En déduire l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G .

EXERCICE 2.2

- 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\frac{\text{Tr}(A)}{n} I_n + \left(A - \frac{\text{Tr}(A)}{n} I_n \right)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2 En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) \oplus \text{Ker}(\text{Tr})$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 2.1

- 1 Faire un raisonnement par analyse-synthèse.
- 2 On rappelle que p est défini par :

$$\forall u = u_F + u_G \in E, p(u) = u_F$$