

# Sommaire

## Espaces vectoriels

1	Montrer qu'une somme est directe	7
2	Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en dimension quelconque	11
3	Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en dimension finie	17
4	Savoir caractériser un hyperplan en dimension finie	21
5	Montrer qu'un sous espace vectoriel est stable par un endomorphisme	25

## Réduction des endomorphismes

6	Déterminer le spectre d'une matrice carrée sans le polynôme caractéristique	31
7	Calculer un polynôme caractéristique	36
8	Montrer qu'un endomorphisme (une matrice carrée) est diagonalisable « à la main »	42
9	Montrer qu'une matrice carrée est trigonalisable et trigonaliser (cas $n = 2$ et $n = 3$ )	49
10	Montrer qu'un endomorphisme (une matrice) est nilpotent(e) et l'utiliser	55
11	Utiliser un polynôme annulateur d'un endomorphisme (d'une matrice carrée)	60
12	Montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable en utilisant un polynôme annulateur	65

## Espaces vectoriels normés

13	Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est convexe	70
14	Montrer qu'une application est une norme	73
15	Montrer qu'une suite d'un espace vectoriel normé converge ou diverge	78
16	Montrer que des normes sont équivalentes	83
17	Montrer qu'un ensemble est ouvert (ou fermé)	87
18	Montrer qu'une partie est dense dans un ensemble	91
19	Montrer qu'une fonction (non nécessairement linéaire) est continue	96
20	Montrer qu'une partie est ouverte (ou fermée) avec une fonction continue à valeurs réelles	101
21	Utiliser une fonction polynomiale en ses coordonnées	103
22	Montrer qu'une partie est compacte	106
23	Utiliser la compacité ; lien avec les fonctions continues	110

## Algèbre bilinéaire

24	Montrer qu'une application est un produit scalaire	113
25	Déterminer le projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie	117

26	Mettre en place le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	124
27	Montrer qu'un endomorphisme d'un espace préhilbertien est symétrique	129
28	Montrer qu'un endomorphisme d'un espace préhilbertien est orthogonal	134
29	Utiliser le théorème spectral	138
30	Réduire une isométrie en dimension 3	142

## Séries numériques

31	Étudier la nature d'une série à termes positifs	149
32	Étudier la nature d'une série alternée	154
33	Étudier la nature d'une série qui n'est pas de signe constant	160
34	Utiliser le critère de d'Alembert	164
35	Reconnaitre un produit de Cauchy	168
36	Utiliser une comparaison suite-série	173
37	Mettre en place une comparaison série-intégrale	178

## Suites et séries de fonctions

38	Déterminer la limite simple d'une suite de fonctions. Cas des séries de fonctions	186
39	Étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions	190
40	Montrer qu'une série de fonctions converge uniformément en utilisant la convergence normale	195
41	Montrer qu'une série de fonctions qui ne converge pas normalement converge uniformément	199
42	Montrer que la limite d'une suite de fonctions est continue. Cas des séries de fonctions	203
43	Calculer des limites d'une fonction définie comme somme de série	207
44	Intervertir une limite et une intégrale sur un segment par convergence uniforme	211
45	Intervertir une somme et une intégrale sur un segment par convergence uniforme	215
46	Montrer que la limite d'une suite de fonctions est de classe $C^1$ . Cas des séries de fonctions	219

## Séries entières

47	Déterminer le rayon de convergence d'une série entière	225
48	Calculer la somme d'une série entière	231
49	Montrer qu'une fonction est développable en série entière et calculer son développement	237
50	Utiliser des séries entières pour résoudre une équation différentielle	242
51	Déterminer un développement en série entière en utilisant une équation différentielle	248

## Arcs paramétrés

52	Étudier un arc paramétré	255
----	--------------------------	-----

## Intégration

53	Déterminer la nature d'une intégrale	263
54	Montrer qu'une fonction est (ou n'est pas) intégrable	269
55	Calculer une intégrale impropre à l'aide d'une intégration par parties	273
56	Calculer une intégrale impropre à l'aide d'un changement de variables	277
57	Utiliser le théorème de convergence dominée	282
58	Utiliser le théorème d'intégration terme à terme	286
59	Étudier la continuité et la dérivabilité d'une intégrale à paramètre	292

## Compléments de probabilité

60	Montrer qu'un ensemble est un événement	299
61	Utiliser la continuité d'une probabilité ; événements négligeables ou presque sûrs	302
62	Utiliser un système complet d'événements et la formule des probabilités totales	308
63	Utiliser la formule de Bayes	314
64	Utiliser les lois usuelles pour modéliser une expérience aléatoire	318
65	Montrer qu'une variable aléatoire admet une espérance finie et la calculer	324
66	Utiliser la formule de transfert pour calculer une espérance	330
67	Montrer qu'une variable aléatoire admet une variance et la calculer	334
68	Calculer la covariance de deux variables aléatoires	340
69	Calculer l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires	343
70	Utiliser les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev	348
71	Déterminer et utiliser une fonction génératrice	352

## Calcul différentiel

72	Résoudre un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants	358
73	Résoudre une équation différentielle scalaire d'ordre 2 à l'aide d'une indication	364
74	Recoller les solutions d'une équation différentielle	369
75	Utiliser la règle de la chaîne	375
76	Savoir étudier une courbe ou une surface	378
77	Rechercher les extrema d'une fonction	382
78	Résoudre une équation différentielle aux dérivées partielles	387