

Sommaire

Espaces vectoriels

1	Montrer qu'une somme est directe	9
2	Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en dimension quelconque	13
3	Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en dimension finie	19
4	Montrer qu'un sous espace vectoriel est stable par un endomorphisme	23

Réduction des endomorphismes

5	Déterminer le spectre d'une matrice carrée sans le polynôme caractéristique	31
6	Calculer un polynôme caractéristique	36
7	Montrer qu'un endomorphisme (une matrice carrée) est diagonalisable « à la main »	42
8	Montrer qu'une matrice carrée est trigonalisable et trigonaliser (cas $n = 2$ et $n = 3$)	49
9	Montrer qu'un endomorphisme (une matrice) est nilpotent(e) et l'utiliser	55

Espaces vectoriels normés

10	Montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est convexe	63
11	Montrer qu'une application est une norme	66
12	Montrer qu'une suite d'un espace vectoriel normé converge ou diverge	71
13	Montrer qu'un ensemble est ouvert (ou fermé) avec définition ou stabilité	76
14	Montrer qu'une partie est dense dans un ensemble	81
15	Montrer qu'une application est continue	86
16	Montrer qu'une fonction linéaire est continue	91
17	Utiliser une fonction polynomiale en ses coordonnées	95
18	Montrer qu'une partie est compacte	98

Algèbre bilinéaire

19	Montrer qu'une application est un produit scalaire	105
20	Déterminer le projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie	109
21	Mettre en place le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	116
22	Montrer qu'un endomorphisme d'un espace préhilbertien est symétrique	121
23	Montrer qu'un endomorphisme d'un espace préhilbertien est orthogonal	126
24	Utiliser le théorème spectral	130
25	Réduire une isométrie en dimension 3	134

Séries numériques

26	Étudier la nature d'une série à termes positifs	143
27	Étudier la nature d'une série alternée	147
28	Étudier la nature d'une série qui n'est pas de signe constant	153
29	Utiliser le critère de d'Alembert	157
30	Reconnaître un produit de Cauchy	161
31	Utiliser une comparaison suite-série	166
32	Mettre en place une comparaison série-intégrale	171

Suites et séries de fonctions

33	Déterminer la limite simple d'une suite de fonctions. Cas des séries de fonctions	181
34	Étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions	185
35	Montrer qu'une série de fonctions converge uniformément en utilisant la convergence normale	190
36	Montrer qu'une série de fonctions qui ne converge pas normalement converge uniformément	194
37	Montrer que la limite d'une suite de fonctions est continue. Cas des séries de fonctions	198
38	Calculer des limites d'une fonction définie comme somme de série	202
39	Intervertir une limite et une intégrale sur un segment par convergence uniforme	206
40	Intervertir une somme et une intégrale sur un segment par convergence uniforme	210
41	Montrer que la limite d'une suite de fonctions est de classe C^1 . Cas des séries de fonctions	214

Séries entières

42	Déterminer le rayon de convergence d'une série entière	223
43	Calculer la somme d'une série entière	229
44	Montrer qu'une fonction est développable en série entière et calculer son développement	235
45	Utiliser des séries entières pour résoudre une équation différentielle	240
46	Déterminer un développement en série entière en utilisant une équation différentielle	246

Arcs paramétrés

47	Étudier un arc paramétré	255
----	--------------------------	-----

Intégration

48	Déterminer la nature d'une intégrale	263
49	Montrer qu'une fonction est (ou n'est pas) intégrable	269
50	Calculer une intégrale impropre à l'aide d'une intégration par parties	273
51	Calculer une intégrale impropre à l'aide d'un changement de variables	277
52	Utiliser le théorème de convergence dominée	282
53	Utiliser le théorème d'intégration terme à terme	286
54	Étudier la continuité et la dérivabilité d'une intégrale à paramètre	292

Compléments de probabilité

55	Montrer qu'un ensemble est un événement	301
56	Utiliser la continuité d'une probabilité ; événements négligeables ou presque sûrs	304
57	Utiliser un système complet d'événements et la formule des probabilités totales	310
58	Utiliser la formule de Bayes	316
59	Utiliser les lois usuelles pour modéliser une expérience aléatoire	320
60	Montrer qu'une variable aléatoire admet une espérance finie et la calculer	326
61	Utiliser la formule de transfert pour calculer une espérance	332
62	Montrer qu'une variable aléatoire admet une variance et la calculer	335
63	Calculer la covariance de deux variables aléatoires	341
64	Calculer l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires	344
65	Utiliser les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev	349
66	Déterminer et utiliser une fonction génératrice	353

Calcul différentiel

67	Résoudre un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants	361
68	Résoudre une ED scalaire d'ordre 2 à l'aide d'une indication	367
69	Recoller les solutions d'une équation différentielle	372
70	Calculer des dérivées partielles. Calculer la différentielle	378
71	Rechercher les extrema d'une fonction	383
72	Utiliser la règle de la chaîne	388
73	Résoudre une équation différentielle aux dérivées partielles	391