1

Notions de probabilités

« *Presque toute la vie humaine roule sur des probabilités.* »
Voltaire
« *Medicine is a science of uncertainty and an art of probability.* »
W. Osler
« *Probability is the very guide of life.* »
M. Ciceron

1.1 Introduction

DANS la vie quotidienne, nous sommes souvent confrontés à des situations diverses qui nous obligent à prendre une décision. Cette décision reste toujours une décision subjective. Ainsi, pour une simple tâche telle que la traversée d'une rue, la décision est individuelle, et dépend de chaque personne, de sa culture (en France, on circule à droite mais au Japon, on circule à gauche) et de son âge, ainsi que de plusieurs autres éléments (à savoir la nature de la voie principale, le nombre de voitures et leur vitesse, la couleur du feu, etc.). La probabilité nous aide à formuler une décision objective dans un monde réel.

Autrefois, on a observé que les résultats de certains phénomènes ou expériences réelles étaient imprévisibles mais que leur moyenne convergeaient vers des valeurs constantes et prévisibles. Ainsi, si l'on jette une pièce de monnaie un très grand nombre N de fois, on observe que la fréquence d'apparition d'une face donnée s'approche de $1/2$. L'étude de cette limite a donné naissance à la probabilité.

Le premier ouvrage traitant – de façon juste – des jeux de hasard est le *Liber De Ludo Alae* de Jérôme Cardan [1] en 1564, mais, paraissant à une époque où fleurissent les traités emplis de calculs faux, il n'a pas eu un grand impact sur les joueurs, principaux utilisateurs d'expériences aléatoires de ce siècle.

En 1620, Galilée [2] fournit au duc de Toscane ses *Considerazione sopre il Giuco dei Dadi*, où il étudie les probabilités des évènements issus de la somme de trois dés à six faces. Les joueurs de l'époque estimaient que 11 et 12 pouvant être obtenus par le même nombre de combinaisons (11 est issu de 641, 632, 551, 542, 533, 443 ; 12 est issu de 651, 642, 633, 552, 543, 444), ils devraient être équiprobables. Galilée établit que la probabilité de 11 est $\frac{27}{216}$, alors que celle de 12 est $\frac{25}{216}$, la probabilité de abc étant de $\frac{6}{216}$ si a, b et c sont deux à deux distincts, de $\frac{1}{216}$ s'ils sont tous égaux, et $\frac{3}{216}$ sinon.

Toutefois, les écrits de Cardan et Galilée ne seront pas diffusés avant ceux de Pascal et Fermat.

En 1654, le chevalier de Méré [3], joueur réputé, soumet à Pascal [4] deux problèmes. Pascal les soumet à Pierre de Fermat [5], et tous deux les résolvent par des méthodes différentes, arrivant aux mêmes résultats.

Un ou deux dés ? *de Méré avait trouvé fausseté dans les nombres pour cette raison : si l'on entreprend de faire 6 avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4 coups ; si l'on entreprend "sonnez"[6], il y a désavantage de l'entreprendre en 24 coups. Néanmoins 24 est à 36 pour les faces des deux dés ce que 4 est à 6 pour un seul dé.* Effectivement, la chance d'obtenir au moins un 6 sur 4 lancers est de $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.5177$ alors qu'obtenir au moins un double-six sur 24 lancers a une probabilité $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.4914$.

Problème des points. Deux joueurs jouent à pile ou face ; le premier qui arrive à trois victoires emporte la mise. Toutefois, il peut arriver que la partie doive s'interrompre avant son terme : comment répartir les mises de manière équitable ? Pascal établit la relation de récurrence pour la probabilité de victoire du premier joueur :

$$\operatorname{prob}(m,n) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{prob}(m-1,n) + \operatorname{prob}(m,n-1)\right) \tag{1.1}$$

1. Girolamo Cardano, Gerolamo Cardano, Hieronymus Cardanus ou encore Jérôme CARDAN en français, est un mathématicien, un philosophe, un astrologue, un inventeur, et un médecin italien, 1501-1576.
2. Galileo GALILEI est un astronome, mathématicien, philosophe, et physicien italien, 1564-1642.
3. Le chevalier de Méré ou Antoine Gombaud est un écrivain français, 1607-1684.
4. Blaise PASCAL, mathématicien français, 1623-1662.
5. Pierre DE FERMAT, mathématicien français, 1601-1665.
6. double-six

> où m et n sont le nombre de points qu'il reste à obtenir pour chacun des joueurs. On prend comme conditions aux limites $\text{prob}\,(n,n) = \frac{1}{2}$ et $\text{prob}\,(0,n) = 1$; la relation de récurrence définit une variante du triangle de Pascal.

À la fin du XVII^e siècle, Jacques Bernoulli [7] – *Ars Conjectandi* – obtient une première forme de la loi des grands nombres. Au début du siècle suivant, Abraham de Moivre [8] – *Doctrine des Chances* – améliore ce résultat pour obtenir un avatar du théorème de la limite centrale.

Au début du XIX^e siècle, Pierre-Simon Laplace [9] – *Traité analytique des probabilités* – définit les fonctions caractéristiques d'une probabilité, et fait sortir les probabilités du cadre combinatoire issu des jeux de hasard. Il donne à la théorie des probabilités des fondements théoriques qui subsisteront près d'un siècle.

La théorie des probabilités intervient dans l'étude de tout phénomène partiellement ou complètement imprévisible. Actuellement, la probabilité est à la base de plusieurs théories et elle est appliquée dans diverses disciplines : la mécanique quantique, la mécanique statistique, la fiabilité, les prévisions statistiques, la météorologie, l'étude des précisions des tirs, les radars, les sonars, les télécommunications (radio, télévision, téléphone mobile), la guerre électronique, les filtrages, les bruits, les jeux de hasard, *etc.*

1.1.1 Outils pour écrire un ouvrage traitant de probabilités

L'écriture de cet ouvrage n'aurait pas été possible sans les nombreux outils libres développés par une large communauté au cours des dernières décennies. Nous – les auteurs – tenons à remercier tout particulièrement Donald Knuth, créateur de LaTeX, Guido Van Rossum, pour Python, Till Tantau pour `pgf` et `tikz`, Olaf Kummer pour `dsfont`, Richard Stallman pour `emacs`. Nous saluons la mémoire de John D. Hunter, auteur initial de `matplotlib`. Nous n'oublions pas les nombreux contributeurs à `numpy`, `scipy`, `listings` et aux packages de l'American Mathematical Society.

7. Jacques Bernoulli est un mathématicien et physicien suisse, 1654-1705.
8. Abraham de Moivre, mathématicien franco-anglais, 1667-1754.
9. Pierre-Simon de Laplace, mathématicien, astronome et homme politique français, 1749–1827.

1.2 Expérience aléatoire, espace des réalisations et événement

1.2.1 Expérience aléatoire

Le monde réel est un espace d'observation mal connu voire inconnu. Ainsi, les phénomènes physiques (la météorologie, les tremblements de terre, les variations de température, *etc.*) et les instrumentations de mesure ou d'observation (radar, thermomètre, sonar, etc.) sont souvent les sources de résultats imprévisibles sous certaines limites. Toute expérience, dont les résultats sont imprévisibles et ils changent avec chaque réalisation de l'expérience, est dite *expérience aléatoire*.

Définition 1.1. Une *expérience aléatoire* est une expérience qui peut être répétée dans les mêmes conditions sans donner le même résultat.

1.2.2 Espace de réalisation

Définition 1.2. L'*espace des réalisations* d'une expérience aléatoire est l'ensemble des résultats qu'elle peut fournir.

La totalité des résultats possibles d'une expérience aléatoire forme un ensemble Ω qui peut être dénombrable ou non (un ensemble fini ou infini par exemple $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ou bien $\Omega = \mathbb{N}$ ou $\Omega = \mathbb{R}$). Cet ensemble Ω est appelé *espace des réalisations*. L'espace des réalisations est couramment noté Ω.

Exemples
La nature de l'espace des réalisations dépend de l'expérience considérée :

- si on lance un dé cubique usuel et qu'on note le chiffre de la face supérieure, on réalise une expérience aléatoire dont l'espace des réalisations est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- à cause du bruit thermique généré par les systèmes électroniques, les courbes caractéristiques ou les valeurs des composants électroniques (résistances, capacités, transistors, etc.) varient. Pour cette raison, on mesure le courant moyen aux bornes d'un composant par $\overline{I} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt$. Dans ce cas, on peut définir Ω comme étant l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (tension), l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des réels positifs (résistance), voire l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes (impédance).
- Le résultat d'une expérience aléatoire peut ne pas être numérique, comme $\{\text{Pile}, \text{Face}\}$, ou l'ensemble des mots utilisant uniquement les caractères A, C, G et T, qui contient l'espace des réalisations des codes génétiques.

1.2.3 Événements

Définition 1.3. Chaque élément ω de l'espace des réalisations Ω est un résultat possible et distinct de l'expérience aléatoire. Cet élément $\omega \in \Omega$ est considéré comme un résultat élémentaire et est appelé *événement élémentaire*.

Un *événement composé* ou tout simplement un *événement* A peut être vu comme un énoncé au sujet d'une expérience aléatoire. Il est identifié à une partie de Ω, $A \subset \Omega$. Les éléments de l'événement A sont des événements élémentaires et correspondent à la réalisation de A. Un événement A est dit réalisé si et seulement si le résultat w de l'expérience est un élément de A, $\omega \in A$.

Par définition un événement A peut être :

- *élémentaire* si son cardinal est égal à un, $\text{Card}\,(A) = 1$,
- *impossible*, si $\text{Card}\,(A) = 0$ ou A est un ensemble vide,
- *certain*, si $\text{Card}\,(A) = \text{Card}\,(\Omega) < \infty$ ou bien $A = \Omega$.

Pour une expérience aléatoire donnée, les événements certains ou impossibles ne sont pas uniques. Deux évènements A et B sont *incompatibles* si $A \cap B = \emptyset$.
Un événement peut être énoncé de deux manières différentes :

- *extension* (dénombrement de tous ses éléments) : $A_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- *compréhension* (en décrivant une propriété de tous ses éléments) : $A1$ est un événement certain dans une expérience de lancement du dé ou bien A_0 correspond à un chiffre entier strictement positif et inférieur à sept.

Certains événements peuvent être décrits par différents énoncés.

Exemples
Lors du lancer d'un dé, on peut donner différents énoncés pour les événements suivants :

- événement impossible : A_1 est l'événement qui consiste à obtenir une face supérieure à 7. A_2 est l'événement qui consiste à obtenir une face égale à 0 ;
- événement certain : soit A_3 l'événement dont le chiffre sur la face supérieure est inférieur à 7. A_4 est réalisé si la face supérieure montre un entier positif entre un et six ;
- événement composé : on peut constituer l'événement A_5 suivant : « le chiffre de la face supérieure appartient à l'ensemble $W = \{1, 2, 3, 6\}$ ». Le même événement peut être énoncé d'une autre manière, c'est-à-dire l'événement A_6 qui consiste à trouver un chiffre diviseur de six sur la face supérieure du dé.

1.3 Probabilité d'un événement

Une probabilité est une application qui à un évènement associe un nombre compris ente 0 et 1. Plus cette probabilité est élevée, plus il est vraisemblable que l'évènement se réalise.

Soit $\mathcal{F}$ la famille des parties de Ω associées aux événements ; la probabilité $\text{prob}\,(A)$ d'un événement $A \in \mathcal{F}$ est une application de $\mathcal{F}$ vers $[0, 1]$. Elle mesure quantitativement la vraisemblance de la réalisation de cet événement. Dans la littérature, on trouve trois définitions possibles pour la probabilité d'un événement.

1.3.1 Définition classique

Pendant longtemps, la définition classique ou la définition de Laplace [10] était l'unique définition de probabilité. Selon sa définition, la probabilité $\text{prob}\,(A)$ d'un événement A est donnée par :

$$\text{prob}\,(A) = \frac{N_A}{N} \tag{1.2}$$

où $N_A = \text{Card}\,(A)$ est le nombre de cas favorables à la réalisation de A et $N = \text{Card}\,(\Omega)$ est le nombre de cas possibles.

Exemples
- pour un dé non pipé, les probabilités de ses 6 éventualités (résultats possibles) sont les mêmes. On dit qu'elles sont équiprobables.
- Quand on jette un dé à 12 faces, la probabilité d'obtenir une puissance de 2 (évènement A) est de

$$\frac{N_A}{N} = \frac{\text{Card}\,(\{1, 2, 4, 8\})}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

- Recevoir un carré d'as au poker (évènement A) lors de la première donne a un nombre de cas favorables de $\binom{4}{4}\binom{48}{1} = 48$ pour un nombre de cas total de $\binom{52}{5} = 2598960$. Ainsi $\text{prob}\,(A) = \frac{1}{54145}$.
- Une boîte renferme 8 boules rouges, 3 boules blanches et 9 boules bleues. On extrait 3 boules au hasard, soit l'événement $A =$ « les trois boules sont rouges ». Il est clair que :

$$\text{prob}\,(A) = \frac{8 \times 7 \times 6}{20 \times 19 \times 18} \tag{1.3}$$

Puisqu'on a 8 possibilités pour extraire la première boule rouge, 7 possibilités pour choisir la deuxième, il ne reste que 6 possibilités pour

10. Pierre Simon de Laplace, mathématicien, physicien et homme politique français, 1749-1827.

choisir la dernière boule. Donc le nombre de cas favorables est donné par $8\times7\times6$. En suivant le même raisonnement, on trouve que le nombre de cas possibles est donné par $20 \times 19 \times 18$.

La définition classique souffre de plusieurs limites :

- Elle est basée sur une hypothèse d'équiprobabilité des événements élémentaires.
  - Dans certains cas, cette hypothèse ne peut pas être vérifiée. Par exemple, dans le cas d'un dé pipé !
  - Elle peut être la source d'une confusion. Par exemple : on lance deux dés, et on note l'événement suivant $A =$ « la somme S de deux chiffres est égale à 5 ». Soit $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ l'espace des réalisations de la somme S de deux faces supérieures de dés. Dans ce cas, est-ce qu'on peut dire dans ce cas $\text{prob}\,(A) = 1/11$ puisqu'on trouve la somme $S = 5$ une fois parmi les 11 cas possibles ? Il est clair que la réponse est négative puisque les événements élémentaires de Ω ne sont pas équiprobables. Ainsi, $S = 2$ est obtenue lorsqu'on a 1 sur la face supérieure de chaque dé, par contre $S = 5$ correspond aux quatre possibilités $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$. Ici le premier (respectivement le deuxième) chiffre du couple représente la face supérieure du premier (respectivement du deuxième) dé.
- Elle ne considère pas la nature de l'expérience. Ainsi, à partir de plusieurs expériences, on sait pour un dé non pipé, que les probabilités de ses 6 éventualités sont les mêmes. De la même façon, on sait que la probabilité pour qu'un nouveau-né soit un garçon est égale à $1/2$ (Voir aussi le paradoxe de Bertrand).
- Elle est applicable uniquement dans le cas d'un espace de réalisations Ω fini. L'utilisation de la définition classique pour un espace de réalisations infini est possible à condition de considérer un rapport de longueurs, surfaces ou volumes. Cette extension de la définition peut générer certains problèmes bien illustrés dans le paradoxe de Bertrand [11].

1.3.2 Paradoxe de Bertrand

Supposons que l'on veuille calculer la probabilité pour que la longueur ℓ_{AB} d'une corde $[AB]$ sur un cercle $\mathcal{C}$ de rayon r soit plus grande que $r\sqrt{3}$, où A et B sont choisis au hasard sur $\mathcal{C}$. Notons par M le milieu du segment $[AB]$. Trois modélisations sont raisonnables :

11. Joseph Louis François Bertrand, mathématicien français, 1822-1900.

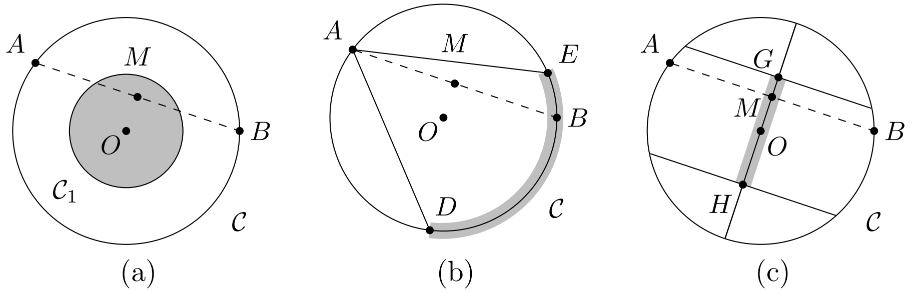

FIGURE 1.1 – Paradoxe de Bertrand

- Si M appartient au cercle $\mathcal{C}_1$ (de rayon $r/2$), alors on trouve que $\ell_{AB} > r\sqrt{3}$, voir figure 1.1 (a). Donc on peut dire que la surface de $\mathcal{C}_1$ représente les cas favorables et celle de $\mathcal{C}$ les cas possibles. Donc la probabilité recherchée est :

$$\text{prob}\left(\ell_{AB} > r\sqrt{3}\right) = \frac{\pi r^2/4}{\pi r^2} = \frac{1}{4} \tag{1.4}$$

- Supposons que le point A soit fixe. Soient D et E deux points de $\mathcal{C}$ tels que l'angle $\widehat{\text{DAE}}$ soit $\pi/3$ et que (AO) en soit une bissectrice. Si B appartient à l'arc DE, on peut montrer alors que $\ell_{AB} > r\sqrt{3}$, voir figure 1.1 (b). Donc les cas favorables peuvent être considérés comme la longueur du l'arc DE et les cas possibles correspondent au périmètre de $\mathcal{C}$. Ainsi, la probabilité recherchée est :

$$\text{prob}\left(\ell_{AB} > r\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi r/3}{2\pi r} = \frac{1}{3}$$

- Supposons que (AB) soit perpendiculaire à la droite (GH) et que la distance $OH = OG = r/2$. Dans ce cas, on peut montrer facilement que si M se trouve entre G et H alors $\ell_{AB} > r\sqrt{3}$, voir figure 1.1 (c). Finalement, on trouve que :

$$\text{prob}\left(\ell_{AB} > r\sqrt{3}\right) = \frac{\text{Distance GH}}{\text{Diamètre}} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

Les trois réponses obtenues correspondent à trois expériences différentes pour un même problème.

1.3.3 Définition fréquentiste

La définition fréquentiste ou statistique consiste à déterminer la probabilité d'un événement comme la fréquence limite de son occurrence dans la réalisation