Sujet 2019

Exercice 1 ....

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1) a) Déterminer $(A-I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

2) On pose $A=N+I$.

a) Exprimer pour tout entier naturel *n*, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n=-1$.

3) a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de *A*.

b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

4) On pose $u_1=(f-Id)(e_1)$ et $u_2=e_1+e_3$.

a) Montrer que le rang de $f-Id$ est égal à 1.

b) Justifier que (u_1,u_2) est une base de $\operatorname{Ker}(f-Id)$.

5) a) Montrer que la famille (u_1,u_2,e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

6) Soit la matrice $P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

7) On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i,j) de $[\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui vaut 1.

a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\left(E_{1,1}+E_{3,3},\, E_{1,2},\, E_{1,3},\, E_{2,2},\, E_{2,3}\right)$.
Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

b) Soit N une matrice quelconque de E. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \Leftrightarrow \left(P^{-1}NP\right)T = T\left(P^{-1}NP\right)$$

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont une base est la famille :

$$\left(P\left(E_{1,1}+E_{3,3}\right)P^{-1},\, PE_{1,2}P^{-1},\, PE_{1,3}P^{-1},\, PE_{2,2}P^{-1},\, PE_{2,3}P^{-1}\right)$$

Exercice 2 ....

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : « le i-ième tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$ et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1) Déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

2) a) Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $P_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}\left(B_i\right) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X=k)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3) On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée et qui vaut 0 sinon.

a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que $P\left([X=k]\cap[Y=0]\right) = \dfrac{n-k}{n(n-1)}$.

b) En déduire $P(Y=0)$.

c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

4) Simulation informatique.
On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$.

a) Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X.
On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB+1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
nB=n-1
X=1
u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
while u<nB+1
   nB=----
   u=grand(1,1,'uin',1,----)
   X=----
end
disp(X, 'la boule noire est apparue au tirage N°')
```

b) Compléter les lignes (4) et (8) ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par X, la valeur prise par Y.

```
(1)  n=input('entrez une valeur pour n :')
(2)  nB=n-1
(3)  X=1
(4)  Y=----
(5)  u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
(6)  while u<nB+1
(7)       nB=----
(8)       if u==1 then Y=----
(9)       end
(10)      u=grand(1,1,'uin',1,----)
(11)      X=----
(12) end
(13) disp(X, 'la boule noire est apparue au tirage N°')
(14) disp(Y, 'la valeur de Y est')
```

Exercice 3 ....

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt$. On a donc, en particulier $u_0 = 1$.

1) Déterminer u_1 et u_2.

2) a) Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante.

b) En déduire que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente.

3) On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).

a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$ puis celle de $\int_{0}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$.

c) Montrer que, pour tout réel t, on a : $e^{-t^2} \geq 1-t^2$.

d) En déduire que : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ puis donner la limite de la suite (u_n).

4) Calculer $\int_0^1 (1-t)^n \, dt$ puis montrer que $u_n \geq \frac{1}{n+1}$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne la série de terme général u_n ?

5) a) Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$$

b) En déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

c) On admet l'équivalent $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$. En écrivant $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$, montrer que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

6) Informatique.
On admet que, si `t` est un vecteur, la commande `prod(t)` renvoie le produit des éléments de `t`.
Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher la valeur de u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
x=1:n
m=2*n+1
y=1:m
v=----
w=----
u=----*v^2/w
disp(u)
```

Problème ....

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

Dans cet exercice, θ (theta) désigne un réel élément de $\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x\geq 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}$$

1) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition.

2) Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.

3) Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et θ.

4) a) Montrer que l'équation $F(x)=\dfrac{1}{2}$ possède une seule solution, notée M_e, que l'on déterminera.

b) Montrer que :

$$\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\ 2^x(1-x)\leq 1$$

c) Comparer $E(X)$ et M_e.

5) Soit a un réel supérieur ou égal à 1 et b un réel strictement positif.

a) Montrer que $P_{(X>a)}(X>a+b)=\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}$.

b) Déterminer la limite de cette quantité lorsque a tend vers $+\infty$. Interpréter cette dernière valeur si l'on admet que la variable X représente la durée de vie d'un certain appareil.

Partie 2 : simulation d'une variable aléatoire

6) On pose $Y=\ln X$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note G sa fonction de répartition.

a) Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.

b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

7) On rappelle qu'en `Scilab` la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire des commandes `Scilab` utilisant `grand` et permettant de simuler X.

Partie 3 : estimation d'un paramètre

On suppose dans la suite que le paramètre θ est inconnu et on souhaite en trouver une estimation ponctuelle puis par intervalle de confiance.
On considère pour cela n variables aléatoires $Y_1,\dots,Y_n$ définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

8) On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

a) Justifier que T_n est un estimateur de θ.

b) T_n est-il un estimateur sans biais de θ ?

c) Calculer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de θ. T_n est-il un estimateur convergent de θ ?

9) a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable T_n.

b) Établir l'inégalité :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]\right) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$$

c) En utilisant le fait que $\theta \leq \dfrac{1}{2}$, déterminer un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 90% lorsque l'on choisit $n = 1000$.

Conseils 2019

Exercice 1 ....

❖ Conseils de méthode

1) a) Calculer d'abord $A-I$ puis $(A-I)^2$ au lieu de développer.

b) Ici, il faut développer, puis écrire une égalité du type $AB=I$ ou $BA=I$.

2) a) La situation est typique de l'utilisation de la formule du binôme de Newton. Pour la fin de la question, il suffit de remplacer N par $A-I$.

b) Avec $n=-1$, il suffit de vérifier que la relation trouvée à la question 1b) donne ce qu'il faut.

3) a) Le polynôme x^2-2x+1 est un polynôme annulateur de la matrice A : on doit en déduire la ou les valeurs propres possibles de A. Ensuite, il faut la ou les tester.

b) On peut raisonner par l'absurde, ce qui évite d'empiéter sur la question 4b).

4) a) Il suffit de chercher le rang de $A-I$, c'est la même chose.

b) Le plus pratique est d'expliciter les vecteurs u_1 et u_2 puis de vérifier qu'ils forment bien une base de $\text{Ker}(f-Id)$.

5) a) Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, il suffit de montrer que (u_1,u_2,e_1) est libre.

b) Les colonnes de T contiennent, dans l'ordre, les coordonnées de $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(e_1)$ dans la base (u_1,u_2,e_1).

6) Il faut repérer que P est la matrice donnant les coordonnées de u_1, u_2 et e_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$: c'est donc une matrice de changement de base. La relation demandée est la formule de changement de base.

7) a) Se donner une matrice $M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$ et écrire le système traduisant qu'elle appartient à E.

b) La clé de cette question est dans la relation $A=PTP^{-1}$ qui permet de réécrire l'égalité $NA=AN$.

c) La question précédente a permis de montrer que $N \in F \Leftrightarrow P^{-1}NP \in E$: il suffit maintenant de traduire ceci en se souvenant que l'on dispose d'une famille génératrice de E.

❖ Conseils de rédaction

1) b) Pour remplacer $(A-I)^2$ par A^2-2A+I, mieux vaut citer le fait que A et I commutent (mine de rien, on a appliqué la formule du binôme de Newton !). Sinon, il faut développer $(A-I)(A-I)=A^2-AI-IA+I^2$ etc.

2) a) Ne pas oublier, ici aussi, de signaler que I et N commutent afin de pouvoir utiliser la formule du binôme de Newton. Il est bien de traiter à part les cas $n=0$ et $n=1$ pour lesquels la somme contient strictement moins de 2 termes.

3) a) Faire attention à ne pas croire que les racines d'un polynôme annulateur sont **les** valeurs propres ! Ce sont seulement les valeurs propres possibles.

4) a) Dire que les colonnes d'une matrice sont toutes proportionnelles prouve seulement que son rang est inférieur ou égal à 1. Il faut signaler qu'au moins une colonne n'est pas nulle pour avoir le rang égal à 1.

b) Ne pas oublier de vérifier que u_1 et u_2 appartiennent à $\mathrm{Ker}(f-Id)$.

5) a) Le système découlant de l'égalité $au_1+bu_2+ce_1=0$ (test de liberté) est très simple à résoudre mais ce n'est pas une raison pour risquer de perdre des points en balançant sans explication que la seule solution est le triplet $(a,b,c)=(0,0,0)$.

7) a) Ayant montré que E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1}+E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3})$, il ne faut pas oublier de vérifier que cette famille est libre pour avoir la dimension de E.

b) Ayant écrit $NA=AN \Leftrightarrow NPTP^{-1}=PTP^{-1}N$, c'est l'inversibilité de P et de P^{-1} qui permet d'avoir *l'équivalence* : $NA=AN \Leftrightarrow P^{-1}NPT=TP^{-1}NP$

❖ Aide à la résolution

1) b) Ayant une égalité du type $AB=I$ ou $BA=I$, on sait, par définition, que A est inversible et que $A^{-1}=B$.

2) a) Ayant écrit la formule du binôme de Newton, il suffit, pour terminer la question, de montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a $N^k=0$.

3) a) Pour vérifier que 1 est effectivement valeur propre de A, il faut montrer que la matrice $A-I$ n'est pas inversible.

b) Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice I (puisque sa seule valeur propre est 1) et ceci conduit à une absurdité.