1. Le paradigme classique

« Toutes les choses sont placées dans le temps comme un ordre de succession,
et dans l'espace comme un ordre de situation. »

Isaac Newton,
Principia Mathematica Philosophae Naturalis

L'espace et le temps constituent une nécessité par laquelle l'esprit humain peut appréhender les relations géométriques entre les objets et leur évolution. Dès l'Antiquité, les philosophes et les mathématiciens grecs ont dessiné les grands principes sur lesquels allaient reposer les concepts de temps et d'espace pour les deux mille cinq cents ans à venir. Le paradigme classique est né dans la pensée d'Euclide et n'a été remis en question qu'à l'aube du XX^{e} siècle. Il a été le support de la représentation de l'espace et du temps de la mécanique newtonienne et continue de nos jours à régir notre expérience quotidienne du mouvement.

Un espace euclidien

L'espace nous entoure de son immensité. Il est par nature même le lieu de toutes choses. Nous ne saurions envisager des objets situés hors de son champ, car la matière semble nécessiter un espace dans lequel elle trouve un lieu où son existence prend consistance. Notre esprit ne sait concevoir l'existence sans espace ; celui-ci se pose comme une nécessité préalable à toute forme d'être. Emmanuel Kant écrivit à ce sujet : « on ne peut jamais se représenter qu'il n'y ait pas d'espace, quoique l'on puisse bien penser qu'il n'y ait pas d'objets dans l'espace[1] ». Selon ce dernier, « L'espace est la condition de la possibilité des phénomènes »[2] à quoi il faut comprendre qu'il est le cadre

[1] Emmanuel Kant, Critique de la raison pure.

[2] Emmanuel Kant, *Ibid.*

dans lequel les phénomènes peuvent se fonder, c'est-à-dire se réaliser et prendre un sens.

Pour Platon, l'espace fournit un emplacement à toutes choses au sens où l'espace est la matière dont sont constitués les objets. Il pensait que l'espace était comparable à un bloc de craie dans lequel les formes des éléments étaient imprimées en relief. Selon lui, l'espace est matière pure, capable de donner corps aux formes mais sans prendre de forme particulière par lui-même. L'idée platonicienne de « formes » renvoie à la célèbre allégorie de la caverne : Platon concevait la condition humaine dans l'Univers comme celle de prisonniers enfermés dans une caverne, condamnés à faire face au fond de celle-ci. Ils aperçoivent sur la roche les ombres des objets qui passent devant l'entrée de la caverne sans pouvoir accéder à la réalité de ceux-ci. Ces ombres ne sont que le pâle reflet de la réalité incarnée par les *formes* ou aussi *idées*. Les formes sont les archétypes de la réalité.

La nécessité ontologique[1] de l'espace lui confère une nature propre, indépendante de toute matière, de tous corps, par laquelle il apparaît en quelque sorte comme un immense théâtre dans lequel se joue l'histoire de l'Univers. Il possède à ce titre des propriétés qui lui sont propres et qui, par conséquent, sont indépendantes des corps qu'il contient et des phénomènes qui s'y déroulent. On peut ainsi construire des objets propres à l'espace et en étudier les propriétés. Ces objets ne sont pas comparables à des objets matériels – ils ne sont pas faits de matière – mais sont des *formes* idéales irréductibles, c'est-à-dire des propriétés de l'espace à l'état pur.

Par exemple, prenons le cas d'un triangle. Dans le monde matériel qui nous entoure nous rencontrons souvent des objets de forme triangulaire, pourtant, selon les conceptions que nous venons de présenter, ces objets ne sont pas des triangles. Un triangle n'a pas de dimension ; que ses côtés mesurent quelques nanomètres ou des millions d'années-lumière, ce qui distingue un triangle d'un autre triangle ce sont uniquement les valeurs des angles à leurs sommets. Le triangle apparaît alors comme une forme idéalisée qui synthétise – on pourrait tout aussi bien dire *transcende* – les propriétés spatiales de l'objet matériel triangulaire. Les philosophes et mathématiciens grecs de l'Antiquité ont donné un nom à la science qui étudie ces propriétés : *la géométrie*.

[1] Ontologique : qui se rapporte à l'être en tant que tel. L'ontologie est la partie de la métaphysique qui se rapporte à l'être.

La géométrie est née formellement au IV^{e} siècle av. J.-C. en Grèce. Il est communément admis que les fondateurs de cette science sont Eudoxe[1] et Euclide[2]. Euclide s'est particulièrement distingué par la rédaction de nombreux ouvrages de mathématiques dont les fameux *Eléments* qui posent les fondements de la géométrie. Les *Eléments* sont constitués de douze livres dont le premier établit les fondations de la géométrie. Il contient la définition de pas moins de trente-cinq objets fondamentaux, six postulats et des définitions triviales (voir l'encadré en page 6).

Ce qui est remarquable dans la pensée d'Euclide c'est son souci de se soustraire de toutes considérations empiriques. Il réduit l'espace à quelques concepts fondamentaux comme ceux de *point*, de *droite*, *d'angle*, etc. dont les relations sont postulées par des axiomes. A titre d'illustration, citons l'exemple des droites. Selon la géométrie euclidienne, une droite possède des propriétés singulières : elle s'étend à l'infini, ne possède aucune épaisseur, reste parfaitement rectiligne. Aucun objet matériel ne peut être assimilé à une droite. Un fil tendu, aussi léger et fin soit-il, finit toujours par s'incurver sous l'effet de son propre poids, à moins de ne posséder aucune masse, ce qui est irréaliste. Ainsi l'espace de la géométrie euclidienne est-il un espace idéalisé dont les propriétés sont axiomatisées, c'est-à-dire affirmées comme postulats préalables. Au centre de la géométrie euclidienne se trouvent deux objets fondamentaux :

- **Le point** : Euclide le définit comme « ce dont la partie est nulle ». En d'autres termes, le point n'a aucune dimension, aucune longueur ni volume. Il est impossible de se représenter un point car notre esprit ne peut appréhender un objet sans dimension. Il s'agit d'un objet totalement abstrait que seules les mathématiques peuvent véritablement cerner dans toute sa signification.
- **La droite** : Selon Euclide, c'est « une longueur sans largeur ». Elle est constituée d'un alignement de points. La droite, comme ensemble de points, hérite de tous les attributs abstraits de ses constituants. Cependant, il est plus aisé de s'en faire une représentation, même si celle-ci n'est finalement qu'approchée.

Ces objets sont mis en relation en s'appuyant sur des axiomes (voir l'encadré en page 6).

Notons que des axiomes sont par définition des propriétés posées *a priori* ne pouvant par conséquent être vérifiées. Or, parmi les axiomes d'Euclide, le cinquième se rapportant aux droites parallèles a depuis l'Antiquité retenu l'attention des mathématiciens. Ces derniers le soupçonnaient de pouvoir être déduit des autres axiomes, ce qui lui retirait, *de facto*¸ son caractère d'axiome. Dans les années 1820,

---

[1] Eudoxe, mathématicien, philosophe et homme de science grec ayant vécu à Cnide aux environs de 400 à 355 av. J.-C.

[2] Euclide, mathématicien grec ayant vécu probablement à Alexandrie aux environs du IV^{e} et III^{e} siècle av. J.-C.

Lobatchevski[1] et Bolyai[2] démontrèrent que ce n'était pas le cas pour la bonne raison que cet axiome n'avait aucun lien logique avec les autres axiomes d'Euclide. Il peut en fait être remplacé par n'importe quel énoncé sur les droites parallèles sans que la structure logique des axiomes d'Euclide en soit affectée. Ils s'engouffrèrent vite dans cette brèche pour élaborer des géométries où, par un point, peuvent passer plusieurs, voire même une infinité, de parallèles à une droite donnée. Cette découverte ouvrit la voie à de nouvelles géométries qualifiées de non euclidiennes. Nous reviendrons au chapitre 3 sur cette notion.

Finalement, l'œuvre d'Euclide aura abouti à géométriser l'espace, à le transformer en un objet mathématique posé *a priori* et indépendant du monde physique. Dans son sillage Kant a pu écrire : « Sur cette nécessité *a priori* [de l'espace] se fondent la certitude apodictique[3] de tous les principes géométriques et la possibilité de leur construction *a priori* »[4]. La vision euclidienne règnera sur la géométrie jusqu'au XIXe siècle où des mathématiciens comme Lobatchevski et Riemann[5] montreront qu'elle ne constitue qu'un cas très particulier de géométries plus générales.

Les axiomes d'Euclide

Les principaux postulats ou axiomes d'Euclide se trouvent rassemblés dans le Livre I des Eléments. On en compte cinq dans ce dernier et un autre, dit axiome d'Archimède ou encore axiome de continuité, dans le Livre V.

1. Chaque couple de points définit exactement une droite, ce que l'on exprime aujourd'hui par : par deux points passe une droite et une seule.
2. Tout segment d'extrémités données peut être prolongé dans chaque direction. Cet axiome exprime l'idée que les droites s'étendent à l'infini.
3. Il est possible de construire un cercle avec n'importe quel point comme centre et n'importe quelle longueur comme rayon. Cet axiome traduit l'infinité de l'espace.

---

[1] Nikolaï Ivanovitch Lobatchevski, mathématicien russe célèbre pour son invention d'une géométrie non euclidienne dite hyperbolique, 1792-1856.

[2] Farkas Bolyai, mathématicien hongrois, 1775-1856.

[3] Apodictique : qui a une évidence de droit et pas seulement de fait.

[4] Emmanuel Kant, Critique de la raison pure.

[5] Bernhard Riemann, mathématicien allemand, 1826-1866.

4. Si deux droites se coupent suivant des angles adjacents égaux, chacun de ces angles est aussi égal à tout autre angle ayant la même origine.
5. Postulat des parallèles. Etant donnés une droite D et un point en dehors de D, il existe une droite et une seule qui passe par le point, qui soit dans le même plan que D et lui soit parallèle.
6. Axiome d'Archimède. En soustrayant de la plus grande de deux grandeurs données plus de sa moitié, et du reste plus de sa moitié, et ainsi de suite un nombre fini de fois, on obtiendra une grandeur moindre que la plus petite. Cet axiome peut être plus simplement exprimé en disant qu'il est toujours possible de choisir un nombre aussi petit que l'on veut. Il exprime une propriété fondamentale de l'espace euclidien : la continuité.

Les propriétés de l'espace euclidien

Géométrie et topologie, les deux facettes de l'espace

Comment caractériser les propriétés de l'espace ? Nous avons tous l'habitude de manipuler des objets situés dans l'espace (déplacements, déformations, duplications, etc.) mais notre expérience est rarement confrontée à la manipulation de l'espace lui-même. Concrètement, nous percevons l'espace par le biais de ce qu'il contient. Par exemple, à travers le mouvement d'une planète relativement aux étoiles nous pouvons reconstituer sa trajectoire dans l'espace. Pour ce faire nous nous appuyons sur les relations spatiales qui lient les objets célestes les uns aux autres comme la position relative de la planète, les distances des étoiles les unes aux autres, etc. Ces informations sont tirées d'une façon générale de propriétés *relationnelles* des objets contenus dans l'espace. Par exemple, l'évaluation du mouvement d'une planète fera intervenir la différence de la mesure des angles de visée d'une étoile jugée fixe et de la-dite planète. Dans cet exercice, nous assimilons inconsciemment (ou pas) les trois astres – la Terre, l'étoile et la planète – à des points qui forment un triangle. La déformation de ce triangle au cours du déplacement de la planète permet d'estimer son mouvement. Cette discussion nous montre une caractéristique très importante de l'espace : c'est au travers des relations entre des objets abstraits comme des points, des droites, etc. que nous bâtissons notre représentation de l'espace. Cette manière d'aborder l'espace porte un nom : elle s'appelle la *géométrie*.

Mais il existe une autre façon de considérer l'espace, non plus sous l'angle des relations entre les objets qui le structurent mais de manière globale. Expliquons-nous. Un être infiniment plat (c'est-à-dire un être à deux dimensions) ne percevrait aucune différence d'un point de vue géométrique entre un plan de dimension infinie et un cylindre de longueur infinie. Dans les deux cas, les triangles qu'il mesurerait possèderaient exactement les mêmes propriétés, les droites parallèles ne se rejoindraient jamais, etc. Pourtant, ces deux espaces sont radicalement différents : en se déplaçant le long d'un cercle du cylindre, notre être plat reviendrait invariablement à son point de départ. Cette situation ne sera jamais observée dans un plan infini. Bien que ces deux espaces possèdent la même géométrie, ils sont pourtant distincts. On en conclut que la géométrie ne suffit pas à caractériser entièrement un espace. L'analyse de la forme globale d'un espace requiert d'autres outils que ceux que nous fournit la géométrie.

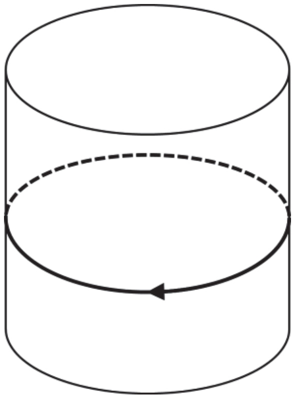

Figure 1-1 : Un être plat se déplaçant le long d'un cercle d'un cylindre revient inévitablement à son point de départ tout en se déplaçant toujours en ligne droite.

Au cours du XIX^{e} siècle, les mathématiciens, conscients des insuffisances de la géométrie, ont développé une nouvelle branche des mathématiques propre à étudier les propriétés globales des espaces : la *topologie*.

Gros plan sur le point

D'après la géométrie euclidienne, une droite, ou un segment de droite, est constituée de points. Ceux-ci sont censés être alignés le long de la droite de manière continue, c'est-à-dire sans laisser de vide, aussi petit que celui-ci pourrait être. Cette propriété s'appelle la *continuité* et l'on dit qu'une droite est *continue*. Pour mieux appréhender le concept de continuité il faut prendre le problème dans un autre sens : imaginons que nous disposions d'un segment de droite et que nous souhaitions le couper en deux segments égaux. Combien de fois pouvons-nous répéter cette opération ? Si le segment est continu l'opération peut être reproduite à l'infini. Cela signifie qu'il est toujours possible de scinder en deux un segment de droite, et ceci quelle qu'en soit la longueur. C'est ce que disent, implicitement, les troisième et sixième axiomes d'Euclide. En effet, pouvoir tracer un cercle où l'on veut, du rayon que l'on souhaite, implique qu'il n'y a pas de bornes inférieure ou supérieure à la distance. Autrement dit, n'importe quelle distance, aussi grande soit-elle peut toujours être augmentée, et n'importe quelle distance, aussi petite soit-elle peut être partagée.

On peut appréhender la notion de continuité d'une autre manière équivalente à la précédente. Prenons deux points quelconques situés sur une droite. L'absence d'épaisseur d'un point implique que, quels que soient ces deux points, ils sont séparés par une infinité non dénombrable d'autres points. Qu'est-ce qu'une infinité non dénombrable ? Existerait-il des infinités dénombrables ? Hé bien la réponse est oui !

Prenons le cas de l'ensemble des nombres entiers naturels (0, 1, 2, 3, etc.), ensemble que les mathématiciens notent par la lettre $\mathbb{N}$. Il contient un nombre infini d'éléments et pourtant nous pouvons les compter, les dénombrer, même si ce décompte ne s'arrête jamais. A la différence, considérons l'ensemble de tous les nombres, entiers et non entiers réunis. Il est noté $\mathbb{R}$ (pour ensemble des nombres *réels*). Entre deux nombres réels quelconques, par exemple 0 et 1, il existe une infinité de nombres, mais cet infini-là n'est pas dénombrable cette fois (voir l'encadré page 11). Or une droite est mathématiquement identique[1] à l'ensemble $\mathbb{R}$; à chaque nombre de $\mathbb{R}$ peut être associé un point de la droite et cela de manière continue. Ainsi, si l'on considère un point quelconque, on peut s'en rapprocher autant que l'on veut sans jamais l'atteindre ou dit autrement, la notion de « point suivant » sur une droite n'existe pas : le point « suivant » d'un point donné peut être aussi proche que l'on veut, et cela sans limite ! La continuité est certainement l'une des propriétés les plus étranges de l'espace euclidien. Elle est à la fois intuitivement immédiate et pourtant impossible à appréhender complètement sinon par un artefact mathématique qui peut devenir très vite complexe.

Le continu s'oppose au discontinu. Dans un espace discontinu, un segment de droite n'est pas indéfiniment sécable ; il arriverait un moment où le segment obtenu ne pourrait être fragmenté. Il est difficile de s'imaginer un tel espace. Intuitivement, nous sommes plus facilement enclins à concevoir la continuité plutôt que la discontinuité, conférant ainsi à cette propriété une qualité quasi naturelle.

La relativité d'échelle

Que se passe-t-il si l'on coupe un segment en deux comme nous l'avons fait plus haut ? Cela revient en quelque sorte à l'observer avec une loupe toujours plus grossissante.

[1] En mathématiques nous disons *isomorphe*, ce qui signifie qu'à tout point d'une droite l'on peut faire correspondre un nombre réel et un seul.

Chaque fragmentation du segment revient à grossir par deux le segment observé. Ce que l'on constate alors c'est que le segment possède, à toute échelle d'observation, exactement la même structure. Prenons encore une fois le segment [0, 1]. Si on l'observe à partir de son origine avec une loupe grossissant dix fois, on voit le segment [0, 0,1]. Mathématiquement ce dernier est en tous points – c'est le cas de le dire – identique à son grand frère [0, 1]. Sa cardinalité (le nombre d'éléments qu'il contient) est la même, à savoir $\aleph_1$ (voir l'encadré page 11). En grossissant encore par dix, nous observerions le segment [0, 0,01] pour lequel nous ferions les mêmes remarques que pour [0, 0,1] et ainsi de suite (voir Figure 1-2). La structure « monotone » de l'espace a pour effet de gommer la notion même d'échelle : quelle que soit l'échelle à laquelle l'on se place, l'espace euclidien possède une structure et une apparence identiques ! Cette propriété remarquable porte le nom de *relativité d'échelle*.

A noter que cette indépendance d'échelle de l'espace euclidien n'est pas perceptible dans l'Univers physique car, nous le savons tous, le changement d'échelle y dévoile des structures différentes. Ainsi le grossissement fait apparaître des atomes, puis des particules, qui obéissent à des lois physiques – la mécanique quantique – sensiblement distinctes de celles qui régissent le Monde à notre échelle. La découverte très récente de la « matière sombre » ou « dark matter » laisse imaginer que, de la même façon, les lois physiques aux échelles supra-galactiques diffèreraient de celles que nous connaissons à notre humble échelle. Il n'en demeure pas moins que selon la géométrie euclidienne, la « trame » de l'espace est, elle, invariante par transformation d'échelle.

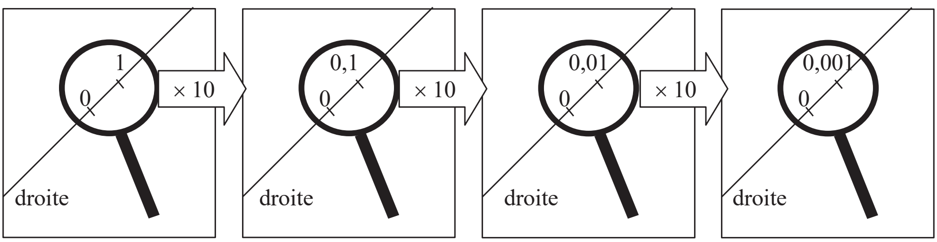

Figure 1-2 : L'espace euclidien possède une structure et une apparence identiques, quelle que soit l'échelle d'observation considérée.