

Table des matières

I	Théorie des groupes	19
1	Théorèmes de Sylow	21
1.1	Notions et résultats à connaître	21
1.1.1	Centre d'un p -groupe	21
1.1.2	Théorème de Cayley pour les groupes	23
1.1.3	Ordre de $GL_n(\mathbb{F}_q)$	24
1.1.4	Étude d'une action à gauche	25
1.2	Théorèmes de Sylow et application	26
1.2.1	Enoncé et démonstration des théorèmes	26
1.2.2	Théorème de Cauchy pour les p -groupes	29
1.3	Exercices.	32
2	Simplicité dans le groupe linéaire	37
2.1	Notions et résultats à connaître	38
2.1.1	Le groupe linéaire, le groupe spécial linéaire et leurs centres respectifs	38
2.1.2	Engendrement de $SL_n(\mathbb{K})$ par les transvections	40
2.1.3	Conjugaison des transvections dans $GL_n(\mathbb{K})$ et $SL_n(\mathbb{K})$	42
2.2	Simplicité de $PSL_n(\mathbb{K})$	43
2.3	Exercices	45
3	Propriétés du groupe alterné	47
3.1	Notions et résultats à connaître	47
3.1.1	Morphisme signature et groupe alterné	47
3.1.2	Engendrement du groupe alterné par les 3-cycles	50
3.1.3	Conjugaison des 3-cycles dans \mathcal{A}_n pour $n \geq 5$	50
3.2	Simplicité du groupe alterné	52
3.3	Exercices	55

4	Structure des groupes abéliens finis	59
4.1	Notions et résultats à connaître	60
4.1.1	Idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	60
4.1.2	Sous-groupes en somme directe	62
4.2	Structure des groupes abéliens finis	64
4.2.1	Exposant d'un groupe abélien fini	64
4.2.2	Le théorème de structure	66
4.3	Exercices	68
5	Théorème de Wedderburn	73
5.1	Notions et résultats à connaître	73
5.1.1	Action d'un groupe sur lui-même par conjugaison	73
5.1.2	Rappels sur les polynômes cyclotomiques	76
5.2	Théorème de Wedderburn	79
5.3	Exercices	82
II	Algèbre linéaire	87
6	Réduction de Frobenius	89
6.1	Notions et résultats à connaître	90
6.1.1	Polynôme minimal d'une matrice et vecteur cyclique	90
6.1.2	Matrices compagnons et propriétés	92
6.2	Le théorème de réduction de Frobenius	96
6.2.1	Un vecteur cyclique d'ordre maximal	96
6.2.2	Le théorème de Frobenius	98
6.2.3	Invariants de similitude	100
6.3	Exercices	101
7	Décomposition polaire et connexité	105
7.1	Notions et résultats à connaître	106
7.1.1	Structures euclidienne et hermitienne	106
7.1.2	Racine carrée d'une matrice	107
7.1.3	Réduction des matrices orthogonales et des matrices unitaires	110
7.2	Décomposition polaire et connexité	113
7.2.1	Le théorème de décomposition polaire	113
7.2.2	Connexité dans $GL_n(\mathbb{R})$	116
7.2.3	Connexité pour les matrices complexes	118
7.3	Exercices	119

8	Décomposition de Dunford	125
8.1	Notions et résultats à connaître	125
8.1.1	Décomposition de Dunford	125
8.1.2	Nilpotence et inversibilité	126
8.2	Algorithme de décomposition de Dunford	128
8.3	Exercices	133
9	Exponentielle de matrice	139
9.1	Notions et résultats à connaître	139
9.1.1	Définition et propriétés de l'exponentielle de matrice	139
9.1.2	Calcul de l'exponentielle de matrice	142
9.2	Deux problèmes associés à l'exponentielle	144
9.2.1	Résolution de $\exp(M) = I_n$ dans $M_n(\mathbb{C})$	144
9.2.2	Surjectivité de l'exponentielle de matrice	145
9.3	Exercices	148
10	Endomorphismes normaux, semi-simples	155
10.1	Notions et résultats à connaître	155
10.1.1	Lemme des noyaux	155
10.1.2	Réduction et commutativité	157
10.2	Endomorphismes normaux, semi-simples	160
10.2.1	Réduction des endomorphismes semi-simples	160
10.2.2	Réduction des endomorphismes normaux	163
10.2.3	Endomorphismes normaux : le cas euclidien	165
10.3	Exercices	166
III	Anneaux – Corps – Polynômes	171
11	Théorème des deux carrés de Fermat	173
11.1	Notions et résultats à connaître	173
11.1.1	Brève typologie des anneaux commutatifs	174
11.1.2	Anneau des entiers de Gauss	176
11.2	Théorème des deux carrés de Fermat	178
11.3	Exercices	182
12	Contenu d'un polynôme	189
12.1	Notions et résultats à connaître	189
12.1.1	Corps des fractions d'un anneau intègre	190
12.1.2	Arithmétique dans les anneaux factoriels	194
12.2	Théorème de Gauss	197

12.2.1	Contenu d'un polynôme et propriétés	197
12.2.2	Théorème de Gauss pour les anneaux factoriels	200
12.3	Exercices	202
13	Loi de réciprocité quadratique	209
13.1	Notions et résultats à connaître	209
13.1.1	Construction des corps finis	209
13.1.2	Le morphisme de Frobenius	212
13.1.3	Carrés de \mathbb{F}_q	213
13.2	La loi de réciprocité quadratique	215
13.2.1	Symbole de Legendre et propriétés	216
13.2.2	Loi de réciprocité quadratique	218
13.3	Exercices	222
14	Polynômes cyclotomiques	227
14.1	Notions et résultats à connaître	227
14.1.1	Cyclotomie dans un corps commutatif	228
14.1.2	Corps des nombres algébriques sur \mathbb{Q}	229
14.2	Polynômes cyclotomiques complexes	233
14.2.1	Coefficients entiers	233
14.2.2	Irréductibilité dans $\mathbb{Q}[X]$	237
14.3	Exercices	239
15	Théorème de Wantzel	245
15.1	Notions et résultats à connaître	246
15.1.1	Notion de nombre constructible	246
15.1.2	Structure de l'ensemble des constructibles	249
15.2	Théorème de Wantzel	251
15.3	Exercices	255
IV	Fonctions de la variable réelle	261
16	Théorème de Darboux	263
16.1	Notions et résultats à connaître	263
16.1.1	Connexité dans \mathbb{R}	263
16.1.2	Théorème des accroissements finis	265
16.2	Théorème de Darboux	268
16.2.1	Énoncé du théorème	268
16.2.2	Fonctions de Darboux	268
16.2.3	Une fonction de Darboux discontinue en tout rationnel	270

16.3 Exercices	273
17 Formule sommatoire d'Abel	277
17.1 Notions et résultats à connaître	278
17.1.1 Transformation d'Abel	278
17.1.2 Fonction Zêta de Riemann	280
17.2 Formule sommatoire d'Abel	282
17.2.1 Formule sommatoire d'Abel	282
17.2.2 Prolongement de la fonction zêta de Riemann	284
17.3 Exercices	285
18 Fonctions nulle part dérivables	289
18.1 Notions et résultats à connaître	289
18.1.1 Théorème de Baire dans un espace complet	289
18.1.2 Développement dyadique d'un réel	291
18.2 Fonctions nulle part dérivables	295
18.2.1 Une fonction continue partout, dérivable nulle part	295
18.2.2 Une autre démonstration du résultat de densité	297
18.3 Exercices	300
19 Théorème de Borel	307
19.1 Notions et résultats à connaître	308
19.1.1 Formule de Taylor polynomiale	308
19.1.2 Fonctions plateaux	309
19.2 Le théorème de Borel	312
19.2.1 Théorème de Borel	312
19.2.2 Fonctions C^∞ non analytiques en 0	314
19.3 Exercices	315
V Calcul différentiel	321
20 Théorème du rang constant	323
20.1 Notions et résultats à connaître	323
20.1.1 Application différentiable sur un ouvert de \mathbb{R}^n	323
20.1.2 Théorème d'inversion locale	326
20.2 Le théorème du rang constant	328
20.2.1 Énoncé et démonstration	328
20.2.2 À propos de l'hypothèse de rang constant	330
20.3 Exercices	332

21 Lemme de Morse	337
21.1 Notions et résultats à connaître	338
21.1.1 Norme subordonnée et spectre	338
21.1.2 Topologie et matrices symétriques	341
21.2 Le lemme de Morse	342
21.2.1 Voisinage d'une matrice symétrique inversible	343
21.2.2 Lemme de Morse	345
21.3 Exercices	347
22 Théorème des extrema liés	353
22.1 Notions et résultats à connaître	353
22.1.1 Conditions d'existence d'un extremum	353
22.1.2 Théorème des fonctions implicites	356
22.2 Le théorème des extrema liés	358
22.2.1 Énoncé du théorème	358
22.2.2 Application : inégalité arithmético-géométrique	360
22.2.3 Application : extrémalité des éléments de $SO_n(\mathbb{R})$	362
22.3 Exercices	364
VI Suites, séries et séries entières	371
23 Complété d'un espace métrique	373
23.1 Notions et résultats à connaître	373
23.1.1 Suites de Cauchy et complétude	373
23.1.2 Construction de \mathbb{R}	375
23.1.3 Complétude de \mathbb{R}	379
23.1.4 Autres constructions de \mathbb{R}	381
23.2 Complétion d'un espace métrique	384
23.2.1 Principe de la construction	384
23.2.2 Unicité du complété à isométrie près	388
23.3 Exercices	390
24 Suites équiréparties modulo 1	395
24.1 Notions et résultats à connaître	395
24.1.1 Fonctions en escalier, fonctions réglées	395
24.1.2 Théorème de convergence de Fejér (cas continu)	400
24.2 Suites équiréparties modulo 1	402
24.2.1 Généralités	402
24.2.2 Critère de Weyl	404
24.2.3 Suite $(n\theta)_{n \in \mathbb{N}}$ avec θ irrationnel	407

24.2.4	Remarques complémentaires	408
24.3	Exercices	409
25	Théorème d'Abel radial	417
25.1	Notions et résultats à connaître	418
25.1.1	Développements en série entière classiques	418
25.1.2	Théorème de Weierstrass et polynômes de Bernstein	421
25.2	Théorèmes d'Abel radial et de Stone	423
25.2.1	Théorème d'Abel radial	423
25.2.2	Théorème de densité de Stone	426
25.3	Exercices	429
26	Deux théorèmes taubériens	435
26.1	Notions et résultats à connaître	436
26.2	Théorèmes taubériens faible et fort	439
26.2.1	Théorème taubérien faible	439
26.2.2	Théorème taubérien fort	441
26.3	Exercices	446
VII	Analyse de Fourier	449
27	Théorème de Fejér	451
27.1	Notions et résultats à connaître	452
27.1.1	Noyaux trigonométriques : Dirichlet, Fejér	452
27.1.2	Théorème de convergence de Dirichlet	456
27.2	Théorèmes de convergence de Fejér	458
27.2.1	Un lemme utile	458
27.2.2	Théorème de Fejér continu	460
27.2.3	Théorème de Fejér L^p	461
27.3	Exercices	462
28	Formule sommatoire de Poisson	471
28.1	Notions et résultats à connaître	472
28.1.1	Théorèmes de Dirichlet et de Fejér	472
28.1.2	Convergence normale des séries de Fourier	474
28.2	Formule de Poisson et sommes de Gauss	477
28.2.1	Formule sommatoire de Poisson	477
28.2.2	Calcul des sommes de Gauss	480
28.3	Exercices	483

29 Transformation de Fourier	489
29.1 Notions et résultats à connaître	490
29.1.1 Transformation de Fourier sur \mathbb{R}^d	490
29.1.2 Transformée de Fourier d'une gaussienne	492
29.1.3 La classe de Schwartz	493
29.2 Inversion et théorème de Plancherel	496
29.2.1 Stabilité de la classe de Schwartz	496
29.2.2 Formule d'inversion	498
29.2.3 Théorème de prolongement de Plancherel	500
29.3 Exercices	502
30 Fonctions de Hermite	511
30.1 Notions et résultats à connaître	511
30.1.1 Transformation de Fourier et classe de Schwartz	512
30.1.2 Fonctions de Hermite	514
30.2 Étude spectrale de la transformée de Fourier	517
30.2.1 Base hilbertienne des fonctions de Hermite	517
30.2.2 Décomposition spectrale de la transformée de Fourier	520
30.3 Exercices	523
VIII Analyse fonctionnelle	529
31 Théorème de Banach-Steinhaus	531
31.1 Notions et résultats à connaître	532
31.1.1 Dual topologique d'un espace de Banach	532
31.1.2 Le théorème de Baire	534
31.2 Théorème de Banach-Steinhaus	536
31.2.1 Le théorème	536
31.2.2 Théorème de l'application ouverte	538
31.2.3 Contre-exemple de Bois-Reymond	541
31.3 Exercices	543
32 Convolution et approximation	551
32.1 Notions et résultats à connaître	551
32.1.1 Rappels sur les espaces L^p avec $p \in [1, +\infty[$	552
32.1.2 Rappels sur l'espace L^∞	554
32.1.3 Inégalités de Hölder et de Minkowski	557
32.2 Produit de convolution	559
32.2.1 Définition et ensemble de définition	559
32.2.2 Régularité du produit de convolution	561

32.3	Approximation de fonctions	564
32.3.1	Une fonction C^∞ à support compact	564
32.3.2	Densité de C_c^∞ dans C_c^0 et dans L^p avec $p < \infty$	566
32.4	Exercices	569
33	Théorème de compacité de Riesz	575
33.1	Notions et résultats à connaître	576
33.1.1	Équivalence des normes en dimension finie	576
33.1.2	Compacité en dimension finie	578
33.1.3	Sous-espace vectoriel de dimension finie	580
33.1.4	Distance à un fermé	582
33.2	Théorème de Riesz	583
33.3	Exercices	584
34	Critère de Kitaiï et applications	589
34.1	Notions et résultats à connaître	589
34.1.1	Inégalité de Cauchy pour une fonction holomorphe	589
34.1.2	Convergence uniforme sur tout compact dans $H(\mathbb{C})$	591
34.2	Critère de Kitaiï	593
34.2.1	Opérateurs hypercycliques	593
34.2.2	Opérateur de dérivation sur $H(\mathbb{C})$	596
34.3	Exercices	598
IX	Probabilités	605
35	Lemme de Borel-Cantelli	607
35.1	Notions et résultats à connaître	607
35.1.1	Vocabulaire de la modélisation probabiliste	607
35.1.2	Théorème de la limite monotone	610
35.1.3	Inégalité de Boole	614
35.2	Lemme de Borel-Cantelli et loi du 0 – 1	615
35.2.1	Lemme de Borel-Cantelli et interprétation	615
35.2.2	Loi du 0 – 1	618
35.3	Exercices	621
36	Loi des grands nombres	629
36.1	Notions et résultats à connaître	629
36.1.1	Convergence en probabilités	629
36.1.2	Convergence vers une variable déterministe	631
36.2	Loi des grands nombres	633

36.2.1	Loi faible des grands nombres	633
36.2.2	Théorème de Khintchine et loi forte des grands nombres	636
36.3	Exercices	637
37	Convergence en loi et estimation	645
37.1	Notions et résultats à connaître	645
37.1.1	Rappels sur les fonctions de répartition	645
37.1.2	Convergence en loi	648
37.1.3	Fonction caractéristique	652
37.1.4	Lemme de Slutsky	655
37.2	Convergence en loi et estimation	657
37.2.1	Théorèmes du Porte-Manteau et de Lévy	657
37.2.2	Théorème de la limite centrale	662
37.2.3	Estimation et intervalles de confiance	664
37.3	Exercices	670
	Notations	677
	Bibliographie	685
	Index	687