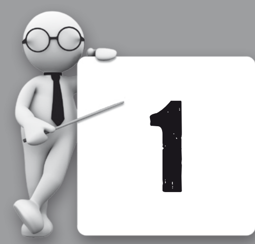
Raisonnement par récurrence



Quand on ne sait pas !

- Ne pas avoir d'idée pour une démonstration directe est une bonne indication pour faire une récurrence, pourvu que la proposition que l'on veut montrer dépende d'un entier naturel n.

- Revoir le principe de récurrence : initialisation pour la première valeur de n possible, puis hérédité (ou transmission) : on suppose la proposition vraie pour un certain entier naturel n fixé (supérieur ou égal à la valeur qui a servi à l'initialisation) et on prouve qu'elle est vraie pour l'entier $n+1$.

- Il faut se persuader qu'il doit exister un lien simple entre la proposition au rang n et la proposition au rang $n+1$.

Que faire ?

- Dans un premier temps, initialiser pour la première valeur de n autorisée.

  EXEMPLE 1 Si on doit montrer que, pour tout entier naturel n **supérieur ou égal à 1**, on a $1+2+...+n = n(n+1)/2$, alors on initialise à $n=1$: la somme se réduit à son premier terme qui vaut 1 et qui est bien égal à $1(1+1)/2$.

- Chercher le lien dont il est question plus haut :

  EXEMPLE 2 Le cas le plus simple est celui où l'énoncé donne le lien en question, lorsque la question porte sur une suite définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence liant u_n et u_{n+1} (par exemple $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$).

EXEMPLE 3 Si $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$, alors $S_{n+1} = u_0 + u_1 + ... + u_n + u_{n+1}$ d'où : $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$.

EXEMPLE 4 Si $P_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$, alors $P_{n+1} = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n \times u_{n+1}$ d'où : $P_{n+1} = P_n \times u_{n+1}$.

Conseils

Attention à remplacer correctement n par $n+1$ dans une expression ! Si dans l'expression considérée, la variable n apparaît en tant que facteur ou est précédée d'un signe « moins » : il faut mettre $n+1$ entre parenthèses afin de respecter les règles de priorité.

EXEMPLE 5 Si $u_n = 2n + e^{-n}$, alors $u_{n+1} = 2(n+1) + e^{-(n+1)} = 2n + 2 + e^{-n-1}$.

EXEMPLE 6 Si $u_n = n^2$, alors $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

L'initialisation seule ou l'hérédité seule ne prouve pas que la proposition est vraie pour tout entier naturel (voir l'exercice 1.6).

Exemple traité

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq n+3$.

➲ Source : extrait du BAC S Métropole juin 2013.

SOLUTION

Montrons-le par récurrence :

- *Initialisation* : pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ donc on a bien $u_0 \leq 0+3$.
- *Hérédité* : supposons que, pour un certain entier naturel n fixé, on ait $u_n \leq n+3$ et montrons que $u_{n+1} \leq n+4$.

  Comme on suppose $u_n \leq n+3$, on en déduit que $\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}(n+3)$, c'est-à-dire :
  $\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}n + 2$. Ainsi, on a $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1$, ce qui s'écrit $u_{n+1} \leq n+3$, et entraîne bien entendu : $u_{n+1} \leq n+4$.
- *Conclusion* : pour tout entier naturel n : $u_n \leq n+3$.

Exercices

Exercice 1.1 On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n$. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 1.2 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n}$. Calculer quelques termes de la suite, établir une conjecture sur l'expression de u_n puis la démontrer.

Exercice 1.3 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 3^n + 1$.

Exercice 1.4 Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x strictement positif, on a : $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 1.5 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n \leq 2$.

Exercice 1.6

1. Montrer que si, pour un entier naturel n fixé, $10^n + 1$ est divisible par 3, alors $10^{n+1} + 1$ est également divisible par 3.
2. Peut-on en conclure que pour tout n de $\mathbb{N}$, $10^n + 1$ est divisible par 3 ?

Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.1	Pour l'hérédité, on a $S_{n+1} = S_n + (n+1)$.
Exercice 1.2	Pour l'hérédité, on suppose, pour un entier naturel n fixé, que $u_n = 1$ et on va chercher u_{n+1}.
Exercice 1.3	Pour l'hérédité, on suppose, pour un entier naturel n fixé, que $u_n = 3^n + 1$ et on va chercher u_{n+1}.
Exercice 1.4	Pour l'hérédité, on utilise l'égalité $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$ et on applique l'hypothèse de récurrence.
Exercice 1.5	Pour l'hérédité, on suppose, pour un entier naturel n fixé, que $0 < u_n \leq 2$ et on construit, à partir de là, un encadrement de u_{n+1}.
Exercice 1.6	**1** Il s'agit de montrer une hérédité (donc ne pas chercher à initialiser). Par hypothèse, il existe un entier k tel que $10^n + 1 = 3k$. Exprimer 10^n puis 10^{n+1} en fonction de k.

Solutions des exercices

Exercice 1.1 Montrons-le par récurrence :

- *Initialisation :* pour $n=1$, on a $S_1=\sum_{k=1}^{1}k$ et cette somme n'a qu'un terme qui vaut 1 donc $S_1=1$. Par ailleurs, $\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$, ce qui montre que $S_1=\frac{1(1+1)}{2}$.
- *Hérédité :* si l'on suppose, pour un entier naturel *n* fixé supérieur ou égal à 1, que $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$, alors, comme $S_{n+1}=S_n+(n+1)$, on en déduit :
$$S_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$
On a alors $S_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}$, et en mettant $n+1$ en facteur, on obtient :
$$S_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
- *Conclusion :* pour tout entier *n* supérieur ou égal à 1, on a : $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 1.2 $u_1=\frac{5u_0-4}{u_0}=\frac{5\times1-4}{1}=1$; $u_2=\frac{5u_1-4}{u_1}=\frac{5\times1-4}{1}=1$. Il semblerait que pour tout entier naturel *n*, on ait : $u_n=1$. Montrons-le par récurrence :

- *Initialisation :* pour $n=0$, l'énoncé donne $u_0=1$.
- *Hérédité :* si l'on suppose, pour un entier naturel *n* fixé, que $u_n=1$, alors, par définition de la suite (u_n), on a : $u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{u_n}=\frac{5\times1-4}{1}=1$.
- *Conclusion :* pour tout entier naturel *n* : $u_n=1$.

Exercice 1.3 Montrons-le par récurrence :

- *Initialisation :* pour $n=0$, l'énoncé donne $u_0=2$ donc on a bien : $u_0=3^0+1$.
- *Hérédité :* si l'on suppose, pour un entier naturel *n* fixé, que $u_n=3^n+1$, alors, par définition de la suite (u_n), on a :
$u_{n+1}=3(3^n+1)-2=3\times3^n+3-2=3^{n+1}+1$.
- *Conclusion :* pour tout entier naturel *n* : $u_n=3^n+1$.

Solutions

EXERCICE 1.4 Soit x un réel strictement positif fixé.

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

- *Initialisation :* pour $n=0$, $(1+x)^0 = 1$ et $1+0\times x = 1$ donc $(1+x)^0 \geq 1+0\times x$.
- *Hérédité :* si l'on suppose, pour un entier naturel n fixé, que $(1+x)^n \geq 1+nx$, alors, en multipliant par $1+x$ qui est positif, on a : $(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx)$.

  En développant, ceci donne $(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2$, soit $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2$.

  Pour finir, on remarque que $nx^2 \geq 0$ et on a bien : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.
- *Conclusion :* pour tout entier naturel n : $(1+x)^n \geq 1+nx$.

  Ainsi, pour tout entier naturel n et pour tout réel x strictement positif, on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$.

EXERCICE 1.5 Montrons-le par récurrence :

- *Initialisation :* pour $n=0$, l'énoncé donne $u_0 = 1$ donc on a bien : $0 < u_0 \leq 2$.
- *Hérédité :* si l'on suppose, pour un entier naturel n fixé, que $0 < u_n \leq 2$, alors on a (en multipliant par 2) $0 < 2u_n \leq 4$, et comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc croissante sur $]0,4]$, on obtient $0 < \sqrt{2u_n} \leq \sqrt{4}$, ce qui s'écrit : $0 < u_{n+1} \leq 2$.
- *Conclusion :* pour tout entier naturel n : $0 < u_n \leq 2$.

EXERCICE 1.6

1 Si 10^n+1 est divisible par 3, alors il existe un entier k tel que $10^n+1 = 3k$ d'où $10^n = 3k-1$. En multipliant cette égalité par 10, on obtient : $10^{n+1} = 30k-10$ d'où $10^{n+1}+1 = 30k-9 = 3(10k-3)$. Puisque $10k-3$ est un entier, $10^{n+1}+1$ est donc également divisible par 3.

2 L'hérédité seule ne permet pas de conclure que la proposition est valable pour tout entier naturel : il manque l'initialisation !

REMARQUE Il se trouve que cette proposition « 10^n+1 est divisible par 3 » n'est vraie pour aucun entier naturel n. En effet, l'écriture décimale de 10^n+1 est un 1 suivi éventuellement de plusieurs 0 puis d'un 1. La somme de ses chiffres est donc égale à 2, et comme 2 n'est pas divisible par 3, on est certain que, pour tout entier naturel n, 10^n+1 ne l'est pas non plus (critère de divisibilité par 3).

Variations des suites

Quand on ne sait pas !

- Revoir les suites et le raisonnement par récurrence.
- Essayer de calculer à la calculatrice ou à la main quelques termes de la suite étudiée afin de se faire une idée de ce qu'on cherche.
- (u_n) est croissante lorsque, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \geq u_n$.
  (u_n) est décroissante lorsque, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \leq u_n$.

Que faire ?

- Si la suite est définie par $u_n = f(n)$, alors il suffit d'étudier les variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

  EXEMPLE 1 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n - \ln(n+1)$. Il suffit de considérer la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x+1)$.
  f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et : $\forall x \geq 0,\ f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x+1-1}{x+1} = \dfrac{x}{x+1}$.
  Comme $x \geq 0$, $x+1 > 0$ donc $f'(x) \geq 0$ et ainsi f est croissante sur $[0;+\infty[$, ce qui prouve en particulier que (u_n) est croissante.

- Si la suite est strictement positive (ou strictement négative) et qu'elle est un produit ou quotient de puissances ou de factorielles, on peut comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

  EXEMPLE 2 Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2^n}{n!}$. On rappelle que $0! = 1$ et que pour tout entier $n \geq 1$, $n!$ est le produit des n entiers consécutifs de 1 à n. Il est clair que $v_n > 0$ pour tout entier naturel n.

De plus, on a : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}\times\dfrac{n!}{2^n}=\dfrac{2^{n+1}}{2^n}\times\dfrac{1\times 2\times\ldots\times n}{1\times 2\times\ldots\times n\times(n+1)}=\dfrac{2}{n+1}$.

Si $n\geq 1$ alors $n+1\geq 2$ et en divisant par $n+1$ qui est positif, on obtient : $1\geq\dfrac{2}{n+1}$, d'où $1\geq\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Enfin, en multipliant par v_n qui est positif, on a $v_{n+1}\leq v_n$ et ce, pour tout entier $n\geq 1$.

Ainsi, (v_n) est décroissante à partir du rang 1.

- Dans la plupart des cas, on étudie le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$.

EXEMPLE 3 Soit (w_n) la suite définie par $w_n=2^n-n$. On a :

$w_{n+1}-w_n=2^{n+1}-(n+1)-(2^n-n)=2^{n+1}-n-1-2^n+n.$ On en déduit :

$$w_{n+1}-w_n=2\times 2^n-2^n-1=2^n-1.$$

Comme $n\geq 0$, $2^n\geq 1$ et $2^n-1\geq 0$ ce qui prouve que (w_n) est croissante.

- Lorsque la suite est définie par récurrence : $u_{n+1}=f(u_n)$ et que *f* est croissante sur un intervalle dans lequel u_n prend ses valeurs, on peut raisonner par récurrence. Par exemple, si on veut montrer que (u_n) est croissante, on montrera par récurrence la proposition « $u_n\leq u_{n+1}$ ».

EXEMPLE 4 Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1}=2u_n-3$. Les premiers termes de la suite sont $u_0=1$, $u_1=-1$, $u_2=-5$, $u_3=-13$, ce qui permet de conjecturer que (u_n) est décroissante.

Considérons alors la proposition P_n : « $u_n\geq u_{n+1}$ ».

- *Initialisation* : $u_0=1$ et $u_1=-1$ donc $u_0\geq u_1$ et P_0 est vraie.
- *Hérédité* : si l'on suppose, pour un entier naturel *n* fixé, que $u_n\geq u_{n+1}$, alors en multipliant par 2 qui est positif, on obtient $2u_n\geq 2u_{n+1}$, en ajoutant -3, on obtient $2u_n-3\geq 2u_{n+1}-3$, c'est-à-dire $u_{n+1}\geq u_{n+2}$.
- *Conclusion* : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq u_{n+1}$. Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.