Chapitre 1

# L'approche de Bernhard Riemann

La première partie de cet ouvrage est dévolue à l'intégration des fonctions numériques (à valeurs réelles ou complexes, voire, on le verra, vectorielles). L'approche de Bernhard Riemann à la théorie de l'intégration, jusque là enseignée dans le cycle secondaire, ne l'est plus aujourd'hui à l'Université que dans la première année du cycle Licence. Il nous paraît toutefois fondamental de la rappeler en exergue de cette partie, d'autant plus que cette approche demeure la seule sur laquelle s'appuient les méthodes numériques classiques de calcul d'intégrales si essentielles en mathématiques appliquées. C'est donc à la présentation de cette approche (à la lumière d'acquis plus avancés de L2 ou de L3) que ce premier chapitre est dédié.

## 1.1. Le cadre des fonctions d'une variable réelle

Nous envisagerons dans cette section l'intégration (au sens de Riemann) des fonctions définies sur un segment de $\mathbb{R}$, voire un autre type d'intervalle, éventuellement non borné. Les fonctions considérées prendront généralement leurs valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\boldsymbol{E}$ de dimension finie. Cette section n'est pas exhaustive : elle contient essentiellement des rappels de résultats relevant de l'enseignement en L1-L2 (souvent avec seulement des esquisses de preuve), l'accent étant surtout mis sur les éclairages nouveaux qui peuvent être apportés à la lumière des acquis de L3. Le souci de coupler aspects théoriques et aspects appliqués (relevant de l'analyse numérique) est également présent, comme d'ailleurs il l'est en filigrane au fil de tout ce chapitre.

### 1.1.1. Intégration *versus* différentiation, somme et différence

Les deux symboles $\Sigma$ et $\int$, l'un «romain», l'autre « calligraphique », désignent tous deux une même opération, à savoir l'addition (entre nombres réels ou complexes, voire entre vecteurs de $\mathbb{R}^\nu$, $\nu > 2$) ; le résultat de cette opération, une fois divisé par le nombre de termes sommés, est ensuite interprété comme une « moyenne ». Cette opération de sommation sous-tend donc l'opération de *prise de moyenne* (on dit aussi de *prise d'espérance*) en probabilités et statistique, en même temps que celle d'*intégration* en analyse. Au contraire, l'opération consistant à calculer la différence de deux quantités (deux nombres réels ou complexes, voire deux vecteurs de $\mathbb{R}^\nu$) doit être pensée, elle, comme l'inverse de cette opération d'intégration : il suffit pour s'en convaincre de songer à l'expression d'un taux de variation $\big(f(t+h)-f(t)\big)/h$ (lorsque $t \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$ ou $t \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{C}^*$ mais avec toujours $0 < |h| << 1$). On a affaire cette fois à l'opération de *différentiation* .

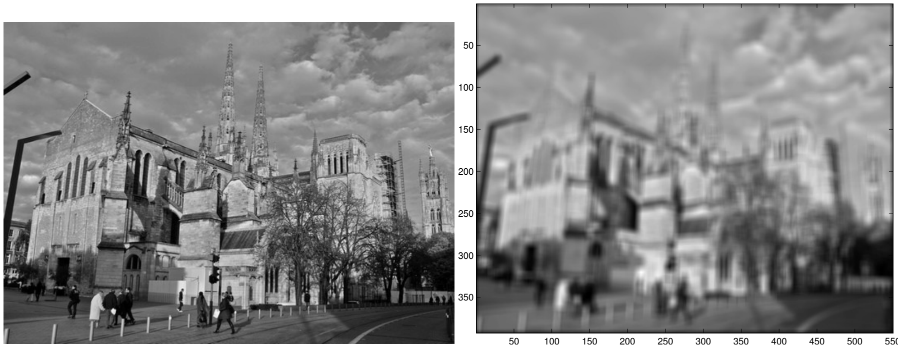

Figure 1.1. Image originelle, puis « intégrée » (ou encore « moyennisée »)

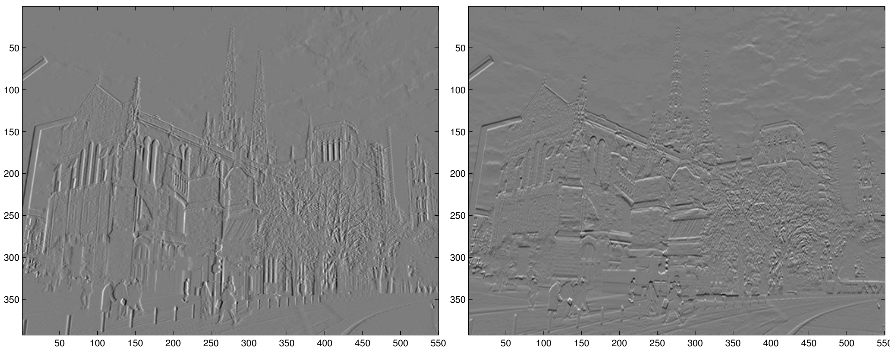

Figure 1.2. Image originelle dérivée horizontalement, puis verticalement

Intégration et différentiation sont deux opérations présentes (lorsque l'on se place dans le cadre discret très simple de l'action sur des fonctions de $\{0,1\}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) dans l'action de la matrice $2\times 2$

$$\texttt{DFT}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

(d'inverse $\texttt{DFT}_2/2$), dite *matrice papillon* ; cette matrice joue, on le verra, un rôle clef en théorie de l'information : la première sortie $x_0 + x_1$ correspondant à un vecteur d'entrée $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ figure l'intégrale de la fonction discrète $0 \mapsto x_0$, $1 \mapsto x_1$ tandis que la seconde sortie $x_0 - x_1$ en figure la dérivée. En traitement d'image par exemple, moyenniser une image (la fonction numérique est par exemple ici la brillance de l'image codée dans la gamme $[0,1]$, du moins au plus lumineux, c'est-à-dire concrètement du noir au blanc pour une image transcrite du format `RGB` au format `GRAY`), c'est en obtenir une version « floue » (penser par exemple à la place de l'Étoile photographiée de nuit pendant un temps d'exposition significatif et les trainées lumineuses des phares des voitures observées sur la pellicule) tandis que la dériver (horizontalement, verticalement, ou suivant une direction oblique), c'est au contraire tâcher d'extraire de l'image les « lignes de rupture » ou de contraste (horizontales, verticales, ou obliques, ce suivant la direction de différentiation choisie) ; les illustrations proposées aux figures 1.1 et 1.2 mettent en lumière ces assertions à partir d'une photo de la cathédrale Saint André de Bordeaux.

### 1.1.2. Maillages et fonctions en escalier en dimension 1

Le principe de l'intégration des fonctions d'une variable réelle (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, voire dans $\mathbb{R}^\nu$ avec $\nu > 2$) *au sens de Riemann* est intimement lié à un calcul d'aire que l'on pourrait qualifier de ≪ vertical ≫. Ce calcul se fonde sur la notion de *maillage du domaine de définition* de la fonction en jeu, en l'occurrence ici un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ non réduit à un point si l'on fait l'hypothèse que la fonction numérique ou vectorielle $f$ est définie sur un tel segment. Ultérieurement, nous évoluerons résolument vers une autre approche, basée cette fois non plus sur le concept de *maillage de l'ensemble de départ*, mais sur celui de *maillage de l'ensemble d'arrivée*, ensemble d'arrivée qui ne pourra par contre être dans un premier temps que $[0,+\infty]$ ou $\mathbb{R}$ : ce sera le principe de l'intégration des fonctions numériques (positives ou à valeurs réelles) *au sens de Lebesgue* ; lors de cette nouvelle approche, l'usage (trop restreint) de partitions *finies* (entrant en jeu dans le concept de *maillage* tel que nous le présentons dans cette sous-section) sera alors élargi au cadre plus souple de partitions *dénombrables*. On introduit dans cette sous-section la brique de base du calcul d'*aire*, ce en se fondant sur les idées développées par le mathématicien allemand Bernhard Riemann [1], 1826-1866. Cette brique de base est la notion de *fonction en escalier* [2] (sur un segment de $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

DÉFINITION 1.1 (fonction en escalier sur un segment). Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $\boldsymbol{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une fonction $f\ : [a,b] \to \boldsymbol{E}$ est dite *en escalier* sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision

$$\sigma = \{a_0 = a < a_1 < \cdots < a_{N-1} < a_N = b\}$$

de $[a,b]$ (une telle subdivision est appelée communément *maillage* du segment $[a,b]$, les nombres réels $a_j$ étant appelés *nœuds* du maillage et la quantité strictement positive $\sup_{0\leq j\leq N-1}(a_{j+1}-a_j)$ *pas* de ce maillage) telle que la fonction $f$ soit constante (identiquement égale à $v^f_{]a_j,a_{j+1}[} \in \boldsymbol{E}$) dans tout intervalle ouvert limité par deux nœuds consécutifs [3] $a_j, a_{j+1}$ de la subdivision $\sigma$, ce pour tout $j = 0,\ldots,N-1$. La subdivision $\sigma$ est alors dite *adaptée* à la fonction en escalier $f$.

1. Si l'on lui doit des travaux intéressants sur le concept d'intégrale (qu'avec Cauchy il contribua pour ses besoins à clarifier), ce sont ses travaux en géométrie différentielle (dont il posa dans sa dissertation en 1854 les premiers jalons) qui certainement constituent l'une des contributions majeures de Riemann aux mathématiques et à la physique.

2. La terminologie est ici importante : il faut veiller à ne pas confondre la notion de *fonction en escalier*, où l'ensemble de départ (on dit aussi ≪ ensemble source ≫) se trouve être le domaine sur lequel on doit travailler, et celle de *fonction étagée* que nous introduirons ultérieurement et où, au contraire, c'est sur l'ensemble d'arrivée (dit aussi ≪ ensemble but ≫) de la fonction que se portent les diverses manipulations préliminaires au calcul.

3. Notons que rien n'est imposé en ce qui concerne les valeurs (en un sens ≪ pathologiques ≫) que prend la fonction $f$ aux nœuds $a_j$ $(j = 0,\ldots,N)$ du maillage.

Il n'y a aucunement unicité de la subdivision adaptée à une fonction en escalier $f : [a,b] \to \boldsymbol{E}$ donnée. Cependant, on observe le fait suivant :

**Remarque 1.1** (meilleure subdivision adaptée à une fonction en escalier donnée)**.** Étant donnée une fonction en escalier $f$ de $[a,b]$ dans $\boldsymbol{E}$, cette fonction ne prend qu'un nombre fini de valeurs et est donc nécessairement bornée relativement à n'importe quel choix de norme sur $\boldsymbol{E}$. Si $\sigma$ est une subdivision adaptée à une fonction en escalier $f$, toute subdivision plus fine que $\sigma$, c'est-à-dire dont les nœuds sont aussi des nœuds de $\sigma$, est encore adaptée à $f$. Pour l'ordre ainsi défini, il existe une unique meilleure subdivision adaptée, minimale au sens où son nombre de nœuds est minimal ; ses nœuds sont les extrémités du segment $[a,b]$ et les points de discontinuité de $f$.

L'ensemble des fonctions en escalier sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\boldsymbol{E}$ est stable par prise de $\mathbb{R}$-combinaison linéaire ; c'est un sous-espace du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $[a,b]$ dans $\boldsymbol{E}$. On peut définir comme suit une opération linéaire de prise d'intégrale sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions en escalier de $[a,b]$, à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\boldsymbol{E}$.

Définition 1.2 (intégrale d'une fonction en escalier sur un segment de $\mathbb{R}$). Si $f : [a,b] \to \boldsymbol{E}$ est une fonction en escalier et que

$$\sigma = \{a_0 = a < a_1 < \cdots < a_{N-1} < a_N = b\}$$

est une subdivision adaptée à $f$ (avec $f(t) = v^f_{]a_j, a_{j+1}[} \in \boldsymbol{E}$ si $t \in ]a_j, a_{j+1}[$ lorsque $j = 0, ..., N-1$), le nombre réel

$$\int_{[a,b]} f(t)\, dt := \sum_{j=0}^{N-1} (a_{j+1} - a_j)\, v^f_{]a_j, a_{j+1}[} = \sum_{j=0}^{N-1} (a_{j+1} - a_j) f\Big(\frac{a_j + a_{j+1}}{2}\Big)$$

ne dépend pas [1] du choix de la subdivision adaptée à $f$ ; c'est l'*intégrale de $f$ sur* $[a,b]$.

### 1.1.3. Intégrabilité au sens de Riemann d'une fonction vectorielle d'une variable réelle définie sur un segment $[a,b]$

Si $f$ est une fonction réelle positive ou nulle définie sur le segment $[a,b]$, on peut définir sans ambiguïté l'aire du *sous-graphe* [2]

$$\mathrm{SG}_{[a,b]}(f) := \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \,;\, t \in [a,b] \text{ et } 0 \le s \le f(t)\} \tag{1.2}$$

pourvu que la condition suivante soit satisfaite :

Critère 1.1 (critère d'intégrabilité pour une fonction $f$ positive ou nulle). *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions positives en escalier $\varphi_\varepsilon$ et $\psi_\varepsilon$ telles que $\varphi_\varepsilon \le f \le \psi_\varepsilon$ sur $[a,b]$ et que*

$$0 \le \int_{[a,b]} (\psi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(t))\, dt \le \varepsilon\,. \tag{1.3}$$

1. Pour voir ceci, on exprime ce nombre (ou vecteur, suivant le cas) avec une subdivision adaptée à $f$ qui soit plus fine que deux subdivisions adaptées données.

2. Si $f : [a,b] \to [0,+\infty[$ est une fonction en escalier, ce sous-graphe se présente comme un sous-histogramme (un histogramme étant par définition la représentation graphique d'une série statistique).

**Remarque 1.2.** Comme toute fonction réelle, positive ou nulle, et en escalier sur $[a,b]$ est nécessairement majorée, il en est de même pour toute fonction réelle positive ou nulle sur $[a,b]$ vérifiant le critère 1.1 ; on peut d'ailleurs toujours choisir dans ce cas la fonction $\psi_\varepsilon$ dans (1.3) de manière à ce que $\psi_\varepsilon \leq \sup f$ sur $[a,b]$.

L'aire du « sous-graphe » (1.2) est alors définie alternativement comme la borne inférieure des intégrales (au sens de la définition 1.2) des fonctions en escalier $\psi$ qui majorent $f$ sur $[a,b]$, ou (ce qui revient au même pourvu que le critère d'intégrabilité 1.1 soit satisfait) comme la borne supérieure des intégrales des fonctions en escalier positives $\varphi$ qui minorent $f$ sur $[a,b]$. Lorsque le critère 1.1 est rempli, on appelle *intégrale de la fonction positive* $f : [a,b] \to [0,+\infty[$ *sur le segment* $[a,b]$ précisément l'aire du sous-graphe $\mathrm{SG}_{[a,b]}(f)$ ainsi définie et on note cette intégrale

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f(t)\,dt &:= \mathrm{aire}\big(\mathrm{SG}_{[a,b]}(f)\big)\\ &= \sup_{\substack{\varphi \text{ en escalier}\\ 0\leq \varphi\leq f \text{ sur } [a,b]}} \int_{[a,b]} \varphi(t)\,dt = \inf_{\substack{\psi \text{ en escalier}\\ \psi\geq f \text{ sur } [a,b]}} \int_{[a,b]} \psi(t)\,dt\,.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Voici maintenant comment on passe au cas des fonctions non plus à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, mais cette fois à valeurs vectorielles. Soit $\boldsymbol{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\nu$ rapporté à une base $\{\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_\nu\}$. Si $f : [a,b] \to \boldsymbol{E}$ est une fonction définie sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\boldsymbol{E}$, la fonction $f$ s'exprime dans la base $\{\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_\nu\}$ sous la forme

$$f = \sum_{j=1}^{\nu} f_j\,\boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{\nu} \big(\sup(f_j,0) - \sup(-f_j,0)\big)\,\boldsymbol{e}_j = \sum_{j=1}^{\nu} (f_j^+ - f_j^-)\,\boldsymbol{e}_j,$$

où les fonctions $f_j^+ := \sup(f_j,0)$ et $f_j^- = \sup(-f_j,0)$ sont des fonctions positives ou nulles. Par exemple, toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ s'exprime

$$f = \big(\sup(\mathrm{Re}\,f,0) - \sup(-\mathrm{Re}\,f,0)\big) + i\,\big(\sup(\mathrm{Im}\,f,0) - \sup(-\mathrm{Im}\,f,0)\big).$$

Définition 1.3 (intégrabilité au sens de Riemann pour les fonctions à valeurs vectorielles définies sur un segment de $\mathbb{R}$). Soit $\boldsymbol{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\nu$ (rapporté à une base $\{\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_\nu\}$, $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f : [a,b] \to E$ une fonction de $[a,b]$ dans $\boldsymbol{E}$ s'exprimant dans la base $\{\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_\nu\}$ sous la forme $\sum_{j=1}^{\nu} f_j\,\boldsymbol{e}_j$. La fonction $f$ est dite *intégrable au sens de Riemann* sur $[a,b]$ si les $2\nu$ fonctions positives ou nulles $f_j^{\pm}$ $(j=1,...,\nu)$ satisfont le critère d'intégrabilité 1.1 sur $[a,b]$. On définit alors l'*intégrale de Riemann de $f$ sur* $[a,b]$ par

$$\int_{[a,b]} f(t)\,dt := \sum_{j=1}^{\nu} \Big(\int_{[a,b]} f_j^+(t)\,dt - \int_{[a,b]} f_j^-(t)\,dt\Big)\,\boldsymbol{e}_j. \tag{1.5}$$

Ni la clause d'intégrabilité, ni (lorsque cette clause est remplie) la valeur de l'intégrale $\int_{[a,b]} f(t)\,dt \in \boldsymbol{E}$, ne dépendent en fait du choix de la base $\{\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_\nu\}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\boldsymbol{E}$.

**Exemple 1.1** (intégrabilité au sens de Riemann des fonctions continues)**.** Si $\boldsymbol{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et que $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, toute fonction continue $f\ :\ [a,b]\to \boldsymbol{E}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. Il suffit, pour vérifier cela, de supposer $\boldsymbol{E}=\mathbb{R}$ et $f\geq 0$ (on raisonne sinon avec les fonctions continues $f_j^{\pm}$, où les $f_j$ sont les fonctions coordonnées de $f$ exprimée dans une base de $\boldsymbol{E}$). On invoque ensuite le fait que toute fonction continue $f\ :[a,b]\to[0,+\infty[$ est uniformément continue sur $[a,b]$ d'après le théorème de Heine. Si l'on introduit, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la subdivision $\sigma^k$ de nœuds les points $a_j^{[k]}=a+(b-a)j/k$ $(j=0,...,k)$, on peut considérer les deux fonctions en escalier $\varphi_k$ et $\psi_k$ prenant respectivement les valeurs $\inf_{[a_j^{[k]},a_{j+1}^{[k]}]} f$ et $\sup_{[a_j^{[k]},a_{j+1}^{[k]}]} f$ sur la maille ouverte $]a_j^{[k]},a_{j+1}^{[k]}[$ (pour $j=0,...,k-1$). Le fait que $f$ soit uniformément continue sur $[a,b]$ implique

$$\lim_{k\to+\infty}\ \sup_{0\leq j\leq k-1}\Big(\sup_{[a_j^{[k]},a_{j+1}^{[k]}]} f-\inf_{[a_j^{[k]},a_{j+1}^{[k]}]} f\Big)=0,$$

ce qui implique

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{[a,b]}(\psi_k(t)-\varphi_k(t))\,dt=0.$$

Le critère 1.1 d'intégrabilité pour les fonctions positives est donc bien rempli pour $f$.

On observe les deux règles opérationnelles suivantes concernant le processus d'intégration au sens de Riemann :

— si $f$ et $g$ sont deux fonctions Riemann intégrables de $[a,b]$ dans $\boldsymbol{E}$, toute combinaison linéaire à coefficients réels $\lambda f+\mu g$ de $f$ et $g$ est aussi Riemann intégrable sur $[a,b]$ et l'on a la relation

$$\int_{[a,b]}(\lambda f+\mu g)(t)\,dt=\lambda\int_{[a,b]}f(t)\,dt+\mu\int_{[a,b]}g(t)\,dt\ ;\tag{1.6}$$

— lorsque $\boldsymbol{E}=\mathbb{R}$ et que $f\ :[a,b]\to\mathbb{R}$ et $g\ :[a,b]\to\mathbb{R}$ sont toutes les deux Riemann intégrables sur $[a,b]$, il en est de même pour les deux fonctions $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ et l'on a la chaîne d'inégalités :

$$\begin{aligned}&\int_{[a,b]}\min(f,g)(t)\,dt\leq\min\Big(\int_{[a,b]}f(t)\,dt,\int_{[a,b]}f(t)\,dt\Big)\\&\leq\max\Big(\int_{[a,b]}f(t)\,dt,\int_{[a,b]}g(t)\,dt\Big)\leq\int_{[a,b]}\max(f,g)(t)\,dt.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Si $\|\ \|$ est une norme sur $\boldsymbol{E}$, on dispose de l'inégalité triangulaire :

$$\forall\,N\in\mathbb{N}^*,\ \forall\,v_1,...,v_N\in\boldsymbol{E},\quad \Big\|\sum_{j=1}^N v_j\Big\|\leq\sum_{j=1}^N\|v_j\|\,.\tag{1.8}$$

Compte tenu de la définition (1.4) de l'intégrale de Riemann des fonctions positives ou nulles pour lesquelles le critère 1.1 est rempli, on déduit de cette inégalité triangulaire la très importante propriété quantitative suivante :

PROPOSITION 1.1 (quantification de l'intégrale au sens de Riemann). *Si* $(\boldsymbol{E}, \|\ \|)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé de dimension finie et que* $f\ : [a,b] \to \boldsymbol{E}$ *est une fonction intégrable au sens de Riemann sur le segment* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$*, la fonction* $\|f\|\ :$ $[a,b] \to [0,+\infty[$ *se plie au critère 1.1 et on a l'inégalité :*

$$\Big\| \int_{[a,b]} f(t)\, dt \Big\| \leq \int_{[a,b]} \|f(t)\|\, dt. \tag{1.9}$$

Lorsque la norme sur $\boldsymbol{E}$ dérive d'un produit scalaire euclidien [1], on dispose de l'inégalité de Cauchy-Schwarz [2] : si $u$ et $v$ sont deux vecteurs de $\boldsymbol{E}$, $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$, l'égalité n'ayant lieu que si les deux vecteurs $u$ et $v$ sont colinéaires. Cette inégalité géométrique majeure se répercute ainsi au niveau du calcul intégral.

PROPOSITION 1.2 (produit scalaire euclidien et intégrabilité). *Soit* $(\boldsymbol{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un* $\mathbb{R}$*-espace euclidien* [3]*,* $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *non réduit à un point,* $f\ : [a,b] \to \boldsymbol{E}$ *et* $g\ : [a,b] \to \boldsymbol{E}$ *deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur* $[a,b]$*. La fonction*

$$t \in [a,b] \longmapsto \langle f(t), g(t)\rangle = \frac{\|f(t)+g(t)\|^2 - \|f(t)-g(t)\|^2}{4} \in \mathbb{R}$$

*est intégrable au sens de Riemann sur* $[a,b]$ *et l'on a l'inégalité*

$$\Big| \int_{[a,b]} \langle f(t), g(t)\rangle\, dt \Big| \leq \Big\| \int_{[a,b]} f(t)\, dt \Big\| \times \Big\| \int_{[a,b]} g(t)\, dt \Big\|\ ; \tag{1.10}$$

*cette inégalité est en général stricte ; dire qu'il y a égalité équivaut à dire qu'il existe* $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *tel que*

$$\int_{[a,b]} \|(\lambda_0\, f + \mu_0\, g)(t)\|^2\, dt = 0. \tag{1.11}$$

DÉMONSTRATION. Pour prouver l'intégrabilité de la fonction

$$t \in [a,b] \longmapsto \langle f(t), g(t)\rangle,$$

on peut se contenter de raisonner en supposant que les fonctions $f$ et $g$ sont positives (chaque fonction coordonnée dans une base orthonormée s'exprimant comme différence de fonctions positives et la clause d'intégrabilité au sens de Riemann des fonctions à valeurs vectorielles se ramenant à celle concernant les fonctions positives d'après la définition 1.3) ; on suppose donc ici $f$ et $g$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On observe que le produit $fg$ de deux fonctions positives $f\ : [a,b] \to [0,+\infty[$ et $g\ : [a,b] \to [0,+\infty[$ vérifiant toutes deux le critère d'intégrabilité 1.1 se plie encore à ce critère car les inégalités $\varphi_\varepsilon^1 \leq f \leq \psi_\varepsilon^1$ et $\varphi_\varepsilon^2 \leq g \leq \psi_\varepsilon^2$ impliquent $\varphi_\epsilon^1 \varphi_\varepsilon^2 \leq fg \leq \psi_\varepsilon^1 \psi_\varepsilon^2$. Comme il est possible de réaliser (1.3) avec des fonctions $\psi_\varepsilon^1$ et $\varphi_\varepsilon^2$ majorées respectivement par

1. Nous reviendrons sur cette notion dans la partie II de cette monographie, voir la définition 6.4 au chapitre 6, indépendamment de la clause stipulant comme ici que $\boldsymbol{E}$ soit dimension finie.

2. Cette inégalité sera étendue ultérieurement à un cadre moins restrictif (voir la proposition 6.1 au chapitre 6).

3. Donc de dimension finie.

$\sup f < +\infty$ et $\sup g < +\infty$ (voir la remarque 1.2), on a

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} (\psi_\varepsilon^1\psi_\varepsilon^2 - \varphi_\varepsilon^1\varphi_\varepsilon^2)(t)\,dt &\leq 2 \times \max(\sup f, \sup g) \times \max_{j=1,2} \int_{[a,b]} (\psi_\varepsilon^j(t) - \varphi_\varepsilon^j(t))\,dt \\ &\leq 2\varepsilon\, \max(\sup f, \sup g).\end{aligned}$$

L'intégrabilité au sens de Riemann de la fonction $\|\lambda f + \mu g\|^2$ résulte alors de la proposition 1.1 couplée avec cette observation. On considère ensuite la forme quadratique positive

$$Q_{f,g}\ : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \int_{[a,b]} \|\lambda f(t) + \mu g(t)\|^2\,dt$$

dont la matrice est

$$\begin{bmatrix} \displaystyle\int_{[a,b]} \|f(t)\|^2\,dt & \displaystyle\int_{[a,b]} \langle f(t), g(t)\rangle\,dt \\ \displaystyle\int_{[a,b]} \langle f(t), g(t)\rangle\,dt & \displaystyle\int_{[a,b]} \|f(t)\|^2\,dt \end{bmatrix}.$$

Le fait que la signature de cette forme quadratique soit $(2,0)$ lorsqu'elle est non dégénérée implique l'inégalité (1.10) (stricte dans ce cas). Le cas où la forme quadratique $Q_{f,g}$ est dégénérée (ce qui correspond au cas d'égalité dans (1.10)) correspond précisément à l'existence de $(\lambda_0, \mu_0)$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que l'on ait (1.11). $\square$

Le résultat subsiste dans le cadre hermitien[1] :

Proposition 1.3 (produit scalaire hermitien et intégrabilité). *Soit* $(\boldsymbol{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un* $\mathbb{C}$*-espace hermitien de dimension* $\nu$*,* $\boldsymbol{E}_\mathbb{R}$ *le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* $2\nu$ *sous-jacent,* $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *non réduit à un point,* $f\ : [a,b] \to \boldsymbol{E}_\mathbb{R}$ *et* $g\ : [a,b] \to \boldsymbol{E}_\mathbb{R}$ *deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur* $[a,b]$*. La fonction*

$$\begin{aligned} t \in [a,b] &\longmapsto \langle f(t), g(t)\rangle \\ &= \frac{\|f(t)+g(t)\|^2 - \|f(t)-g(t)\|^2 + i\|f(t)-ig(t)\|^2 - i\|f(t)+ig(t)\|^2}{4} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

*est intégrable au sens de Riemann sur* $[a,b]$ *et l'on a l'inégalité*

$$(1.12)\qquad \Big|\int_{[a,b]} \langle f(t), g(t)\rangle\,dt\Big| \leq \Big\|\int_{[a,b]} f(t)\,dt\Big\| \times \Big\|\int_{[a,b]} g(t)\,dt\Big\|\ ;$$

*cette inégalité est en général stricte ; dire qu'il y a égalité équivaut à dire qu'il existe* $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *tel que*

$$(1.13)\qquad \int_{[a,b]} \|(\lambda_0\, f + \mu_0\, g)(t)\|^2\,dt = 0.$$

1. Nous reviendrons sur cette notion dans la partie II de cette monographie, voir le chapitre 6 (definition 6.4) indépendamment de la clause stipulant comme ici que $\boldsymbol{E}$ soit dimension finie. Pour ce qui concerne l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un cadre complexe plus général, voir encore la proposition 6.1 du chapitre 6.