

CHAPITRE 1

Le plan complexe et les formes différentielles dans le plan

1.1. Le plan complexe et ses compactifications

Cette première section est naturellement dévolue à une présentation du cadre sur lequel opère l'analyse complexe en une variable, à savoir le plan complexe $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Il s'agit certes ici géométriquement d'un univers « plat » (sur lequel s'effectue l'analyse mathématique au niveau des êtres ou des fonctions). Cependant, nous serons amenés, en vue de réaliser une compactification bien utile de ce cadre (comme la droite réelle achevée $[-\infty, +\infty]$ en est une pour \mathbb{R}), d'envisager, au lieu de cet univers « plat », un univers « courbe » (même ici de courbure constante et strictement positive), à savoir la sphère de Riemann. Le recours à la géométrie projective sera également invoqué pour proposer un second modèle (algébrique autant que géométrique cette fois) de compactification, à savoir la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Cette section introductive constitue donc un premier signe du fait que l'introduction du cadre même dans lequel opère l'analyse complexe (à savoir le plan \mathbb{R}^2) oblige que l'on croise très tôt un point de vue de géomètre avec un point de vue d'analyste.

1.1.1. Deux structures sur \mathbb{R}^2

L'ensemble \mathbb{R}^2 des couples de nombres réels est naturellement équipé d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel ; c'est le *plan (vectoriel) réel*. Le choix du point $O = (0, 0)$ comme origine et de la base canonique (\vec{i}, \vec{j}) comme base de ce \mathbb{R} -espace vectoriel fournit un *repère* (orthonormé pour le produit scalaire usuel) pour le \mathbb{R} -*espace affine* correspondant, dit *plan (affine) réel*. On sait d'autre part qu'il existe une correspondance biunivoque entre \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} via

$$(1.1) \quad (x, y) \longleftrightarrow x + iy$$

(au point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on associe son *affixe*). L'ensemble \mathbb{R}^2 peut ainsi être équipé d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel, la multiplication externe étant¹

$$(\alpha + i\beta) \cdot (x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x),$$

ce en conformité avec la règle de calcul algébrique

$$(\alpha + i\beta) \times (x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$$

1. On peut effectuer le produit en opérant trois multiplications et cinq additions-soustractions, au lieu, comme ici, de quatre multiplications et deux additions-soustractions ; le gain d'une multiplication s'avère souvent appréciable du point de vue des temps de calcul. Voir à ce sujet l'exercice 1.1.

et la correspondance biunivoque (1.1) entre les points du plan affine réel et leurs affixes. L'ensemble des couples (x, y) de nombres réels, une fois identifié à \mathbb{C} et équipé de cette structure de \mathbb{C} -espace vectoriel, est le *plan (vectoriel) complexe*. Il s'agit d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 1 (alors qu'avec la structure de \mathbb{R} -espace vectoriel, nous avons affaire à un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2). En prenant comme repère $(0; 1)$ (1 étant ici le nombre complexe $1 \times 1 + 0 \times i$), on dispose d'un repère pour le \mathbb{C} -espace affine correspondant, dit *plan complexe*. Notons toutefois que cette terminologie est équivoque car il s'agit d'un \mathbb{C} -espace vectoriel complexe de dimension 1, donc d'une droite complexe, et non d'un plan ! On la conserve néanmoins dans la pratique courante.

Les points de \mathbb{R}^2 sont ainsi repérés de deux manières :

- par le couple (x, y) de leurs coordonnées *cartésiennes*, \mathbb{R}^2 (vu comme plan affine réel, équipé de sa structure de \mathbb{R} -espace affine de dimension 2) étant rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$;
- par leur affixe complexe $z = x + iy$, \mathbb{R}^2 étant ici vu comme le plan complexe, c'est-à-dire le \mathbb{C} -espace affine \mathbb{C} (équipé de sa structure de \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 1).

La *conjugaison complexe* $z \mapsto \bar{z}$ sera appelée à jouer un rôle majeur . Les formules de « passage » des coordonnées (x, y) aux « fausses coordonnées » (z, \bar{z}) sont

$$(1.2) \quad \begin{aligned} z &= x + iy & \bar{z} &= x - iy \\ x &= \frac{z + \bar{z}}{2} & y &= \frac{z - \bar{z}}{2i}. \end{aligned}$$

La raison pour laquelle nous parlons de « fausses coordonnées » à propos du couple (z, \bar{z}) est la suivante : au contraire de (x, y) , le couple (z, \bar{z}) ne saurait être interprété comme un système de paramètres indépendants car \bar{z} est fonction de z (c'est le conjugué) ! Le paramètre complexe $z = x + iy$ intègre à lui seul les deux degrés de liberté dont dépend le point courant de \mathbb{R}^2 ; avec la connaissance à la fois de z et \bar{z} , nous avons automatiquement une information redondante. Nous verrons cependant dans la suite de ce cours que les formules (1.2) s'avèreront néanmoins utiles : on fera « comme si » le couple (z, \bar{z}) joue le rôle d'un couple de paramètres indépendants : une fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$ d'un ouvert U de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{C} , s'exprime en effet, grâce aux formules (1.2), comme une fonction g de z et \bar{z} (définie cette fois dans $U \times \text{conj}(U)$) :

$$\forall (x, y) \in U, f(x, y) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = g(z, \bar{z}).$$

Un autre repérage des points du plan complexe (ramené au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$) s'avère possible. C'est le *repérage polaire*, où, pour $z \in \mathbb{C}^*$,

$$(1.3) \quad \begin{aligned} r(z) &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} & \theta(z) &= \arg(z) \\ z &= r \exp(i\theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned}$$

Si $z = 0$, on a $r = 0$, mais la définition de l'argument devient hors de propos. Notons que dans cette formule (1.3), l'exponentielle complexe est définie comme la somme de

la série entière (de rayon de convergence $+\infty$, on y reviendra plus loin)

$$\exp(w) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \quad \forall w \in \mathbb{C},$$

les fonctions trigonométriques (complexes) \cos et \sin s'en déduisant par les relations d'Euler

$$(1.4) \quad \cos w := \frac{\exp(iw) + \exp(-iw)}{2} \quad \sin w := \frac{\exp(iw) - \exp(-iw)}{2i} \quad \forall w \in \mathbb{C}.$$

En revanche, la « fonction » $z \mapsto \arg z$ n'est pas une fonction au sens usuel (à une entrée z , on n'associe pas une « valeur » $\arg z$); l'argument en effet n'est défini que modulo 2π et ce que l'on convient de noter $\arg z$, lorsque z est un nombre complexe non nul, est l'ensemble de toutes les déterminations possibles de l'argument, parmi elles la détermination (dite *principale*), que l'on note $\text{Arg } z$, et qui est par convention celle appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$; ainsi, si $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\arg z = \text{Arg } z + 2\pi\mathbb{Z} = \begin{cases} 2 \arctan \left(y / (x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right) + 2\pi\mathbb{Z} & \text{si } z \notin]-\infty, 0[\\ \pi + 2\pi\mathbb{Z} & \text{si } z \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

Notons au passage que la fonction $z \mapsto \text{Arg } z$ est bien C^∞ dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ au vu de son expression analytique¹ :

$$(1.5) \quad \text{Arg}(x + iy) = 2 \arctan \left(y / (x + \sqrt{x^2 + y^2}) \right) \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0].$$

On dit que la fonction $z \in \mathbb{C}^* \mapsto \arg z$ est une *fonction multivaluée* ou encore une *fonction multivalente*² au lieu d'une fonction au sens classique du terme (c'est-à-dire *monovaluée* ou encore *monovalente*).

1.1.2. La sphère de Riemann et la projection stéréographique

Il est commode de réaliser une compactification du plan complexe (équipé de sa topologie d'espace métrique usuelle, celle de \mathbb{R}^2) en lui adjoignant un point dit *point à l'infini*. Une manière de concrétiser cette réalisation consiste à plonger $\mathbb{R}_{x,y}^2$ dans $\mathbb{R}_{x,y,t}^3$ via

$$(x, y) \mapsto (x, y, 0)$$

($\mathbb{R}_{x,y}^2$ est alors considéré comme $\{(x, y, 0); (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{t = 0\}$) et à considérer la sphère unité

$$\mathbb{S}^2 := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$$

et son pôle nord $N := (0, 0, 1)$. On parle de *sphère de Riemann*³ pour désigner \mathbb{S}^2 au travers de sa relation avec le plan complexe (relation que nous allons expliciter). La figure 1.1 illustre les constructions qui vont suivre. La *projection stéréographique*

1. Qu'il est aisé de vérifier en exercice en s'aidant de figures dans le plan.

2. Ces qualificatifs ont été introduits au XIX^e siècle. Il est important de souligner que le concept de « fonction » à cette époque était bien souvent celui de fonction multivalente.

3. Élève de Gauß, Bernhard Riemann (1826-1866) a posé dans son traité de 1854 *Sur les hypothèses sur lesquelles reposent les fondements de la géométrie* les bases de ce qui allait devenir la géométrie différentielle. Au travers de l'étude des surfaces (plus particulièrement des surfaces de Riemann, dont \mathbb{C} et \mathbb{S}^2 sont des exemples), le couplage avec l'analyse complexe est omniprésent dans ses travaux.

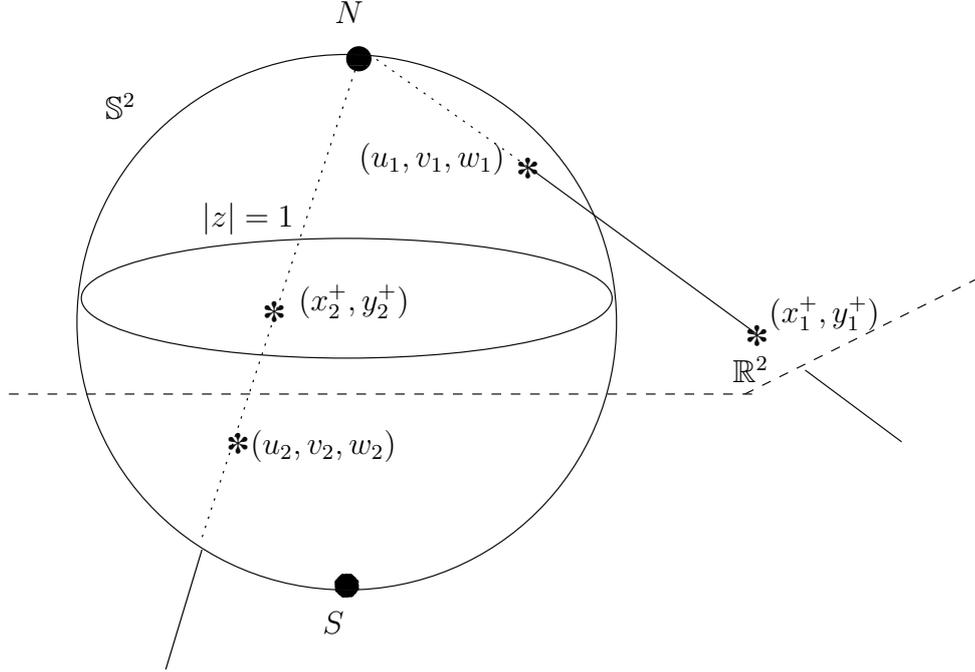


FIGURE 1.1. Sphère de Riemann et projection stéréographique

depuis le pôle nord est l'application π^+ de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ dans \mathbb{R}^2 définie ainsi : au point (u, v, w) de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, on associe le point $\pi^+(u, v, w) = (x^+(u, v, w), y^+(u, v, w), 0)$ du plan $\{t = 0\} \simeq \mathbb{R}_{x,y}^2$ où la droite issue de N et passant par (u, v, w) perce ce plan. Par un calcul immédiat (basé sur le théorème de Thalès), on trouve

$$(1.6) \quad x^+(u, v, w) = \frac{u}{1-w} \quad y^+(u, v, w) = \frac{v}{1-w}.$$

Cette application π^+ de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ dans $\mathbb{R}^2 \simeq \{t = 0\}$ s'avère être bijective et son inverse est l'application

$$(1.7) \quad (x, y, 0) \mapsto (u(x, y), v(x, y), w(x, y)) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2} \right).$$

Ainsi le plan complexe se trouve-t'il en bijection (il s'agit même en fait d'un difféomorphisme C^∞) avec $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$; le pôle sud de \mathbb{S}^2 correspond à l'origine $(0, 0)$ du plan. Le pôle nord N de \mathbb{S}^2 est naturellement interprété comme le *point à l'infini* du plan complexe.

On peut répéter cette opération avec le pôle sud S et considérer cette fois l'application π^- de $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ dans \mathbb{R}^2 qui au point (u, v, w) de $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ associe le point

$$(1.8) \quad \pi^-(u, v, w) = (x^-(u, v, w), -y^-(u, v, w), 0),$$

où $(x^-(u, v, w), -y^-(u, v, w), 0)$ désigne le point où la droite issue de S et passant par (u, v, w) perce le plan $\{t = 0\} \simeq \mathbb{R}_{x,y}^2$. La raison pour laquelle on introduit ici le signe

moins devant $y^-(u, v, w)$ est le souci de respecter la cohérence des orientations : si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^3 , le repère $(\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$ n'est plus direct dans \mathbb{R}^3 , alors que le repère $(\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k})$ l'est ! Toujours grâce au théorème de Thalès, on trouve cette fois

$$(1.9) \quad x^-(u, v, w) = \frac{u}{1+w} \quad y^-(u, v, w) = \frac{v}{1+w}.$$

L'application π^- de $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ dans \mathbb{R}^2 s'avère être bijective et son inverse est l'application

$$(1.10) \quad (x, y, 0) \mapsto (u(x, y), v(x, y), w(x, y)) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, -\frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right).$$

Ainsi le plan complexe se trouve-t'il aussi en bijection (il s'agit encore ici d'un difféomorphisme C^∞) avec $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$; le pôle nord N de \mathbb{S}^2 correspond cette fois à l'origine $(0, 0)$ du plan, tandis que le pôle sud S est maintenant interprété comme le point à l'infini du plan complexe.

Un calcul s'avère particulièrement instructif ici : il est clair que $\pi^+ \circ (\pi^-)^{-1}$ est un difféomorphisme C^∞ entre le plan \mathbb{R}^2 privé de l'origine $(0, 0)$ et lui-même. Le calcul donne, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$(1.11) \quad \begin{aligned} (\pi^+ \circ (\pi^-)^{-1})(x, y) &= \pi^+ \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, -\frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right) \\ &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2} \right). \end{aligned}$$

En termes d'affixes complexes, le difféomorphisme¹ $\pi^+ \circ (\pi^-)^{-1}|_{\mathbb{C}^*}$ est ainsi l'involution

$$z \in \mathbb{C}^* \mapsto \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

de \mathbb{C}^* dans lui-même; ce difféomorphisme opère une transformation géométrique préservant les angles orientés des figures.

Le souci de respect des orientations qui nous a guidé pour la construction des deux cartes $(\mathbb{S}^2 \setminus N, \pi^+)$ et $(\mathbb{S}^2 \setminus S, \pi^-)$ (dont la mise en commun réalise un atlas de la surface différentiable \mathbb{S}^2) se traduit ici par le fait que le jacobien de la transformation $x+iy \in \mathbb{C}^* \mapsto 1/(x+iy) \in \mathbb{C}^*$ (considérée comme un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans lui-même) reste strictement positif en tout point. Notons par contre que la composée de π^+ avec l'inverse de la projection stéréographique depuis le pôle sud exprimée dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (ce qui revient à oublier cette fois le signe $-$ devant y^- dans (1.8)) correspond, une fois restreinte à \mathbb{C}^* et exprimée en termes d'affixes complexes, à l'*inversion géométrique*

$$z \in \mathbb{C}^* \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$$

1. On peut interpréter ce difféomorphisme comme un changement de carte sur la sphère \mathbb{S}^2 permettant de ramener l'étude d'un problème posé sur la sphère au voisinage du pôle nord (ou, ce qui revient au même, au voisinage de l'infini dans le plan complexe) à celle d'un problème posé au voisinage de 0 dans le plan complexe.

par rapport au cercle unité ; on sait que cette transformation géométrique importante préserve les valeurs absolues des angles orientés des figures, mais change leur signe.

1.1.3. La droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Il existe une autre manière de compactifier le plan complexe en lui ajoutant un point à l'infini. Cette construction est la transcription dans le cadre complexe de celle de la droite projective réelle. Elle puise ses origines dans le concept de *perspective* introduit par les artistes de la Renaissance, formalisé ultérieurement par des géomètres tels Girard Desargues (1591-1661) au milieu du XVII^e siècle. On introduit sur

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

la relation d'équivalence de colinéarité

$$(z_0, z_1) \mathcal{R} (z'_0, z'_1) \iff z_0 z'_1 - z_1 z'_0 = 0.$$

L'espace quotient

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}}{\mathcal{R}}$$

est équipé d'une distance ainsi définie

$$(1.12) \quad d([z_0 : z_1], [w_0 : w_1]) := \frac{|z_0 w_1 - z_1 w_0|}{\sqrt{|z_0|^2 + |z_1|^2} \sqrt{|w_0|^2 + |w_1|^2}}$$

si $[z_0 : z_1]$ et $[w_0 : w_1]$ désignent les classes d'équivalence respectivement des couples (z_0, z_1) et (w_0, w_1) . La définition (1.12) est bien indépendante des représentants (z_0, z_1) et (w_0, w_1) choisis dans ces classes. On remarque que

$$(1.13) \quad \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[1 : z] ; z \in \mathbb{C}\} \cup \{[0 : 1]\}.$$

L'application $z \mapsto [1 : z]$ est un homéomorphisme entre \mathbb{C} et son image, à savoir l'ouvert $U_0 = \{[1 : z] ; z \in \mathbb{C}\}$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Le point $[0 : 1]$ s'interprète dans la décomposition (1.13) comme le point à l'infini du plan complexe \mathbb{C} .

Remarque 1.1. L'application

$$(u, v, w) \in \mathbb{S}^2 \longmapsto \begin{cases} [u + iv : 1 - w] & \text{si } w \neq 1 \\ [1 + w : u - iv] & \text{si } w \neq -1 \end{cases}$$

(il y a compatibilité des deux définitions si $w^2 \neq 1$ du fait de l'équation de \mathbb{S}^2 , à savoir $u^2 + v^2 + w^2 = 1$) réalise un difféomorphisme entre la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 et la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ que l'on peut paramétrer par deux cartes (U_0, φ_0) et (U_1, φ_1) correspondant aux deux copies de \mathbb{C} , $U_0 := \{[1 : z] ; z \in \mathbb{C}\}$ et $U_1 = \{[z : 1] ; z \in \mathbb{C}\}$ ($\varphi_0([1 : x + iy]) = (x, y)$ et $\varphi_1([x + iy : 1]) = (x, y)$). Ceci montre bien la cohérence (entre elles) des deux manières de compactifier le plan complexe en lui ajoutant un point à l'infini. Les analystes préféreront la compactification *via* la sphère de Riemann, les algébristes celle réalisée par la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Ce qui différencie aussi dans notre présentation les deux réalisations de compactification de \mathbb{C} que sont la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 et la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est que la première de ces deux surfaces différentiables est présentée (avec son atlas) comme plongée dans \mathbb{R}^3 , tandis que la seconde est présentée (toujours avec son atlas) sous forme intrinsèque.

1.1.4. Exercices

Exercice 1.1 (multiplication rapide de deux nombres complexes¹). Étant donné deux nombres complexes $\alpha + i\beta$ et $x + iy$, la formule algébrique usuelle opérant le produit de ces deux nombres $(\alpha + i\beta) \times (x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$ implique quatre multiplications et deux additions (calculer un nombre complexe revenant à calculer sa partie réelle et sa partie imaginaire et l'on convient ici qu'une soustraction compte comme une addition). Indiquer une méthode basée sur le calcul de trois nombres intermédiaires k_1, k_2, k_3 (calculables chacun avec une addition et une multiplication) de manière à ce que, au final $(\alpha + i\beta) \times (x + iy) = (k_1 - k_2) + i(k_1 + k_3)$.

Exercice 1.2 (distance cordale dans \mathbb{C}). Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. On définit la *distance cordale* entre z_1 et z_2 comme la distance de leurs antécédents $(\pi^+)^{-1}(z_1)$ et $(\pi^+)^{-1}(z_2)$ sur la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 via la projection stéréographique π^+ depuis le pôle nord. Montrer que cette distance vaut

$$(1.14) \quad d_{\text{cord}}(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}.$$

Comment cette distance cordale se trouve-t-elle reliée à la distance projective, définie (voir (1.12)) par $d_{\text{proj}}(z_1, z_2) = d([1 : z_1], [1 : z_2])$? Calculer, pour $z \in \mathbb{C}$, la valeur de $d_{\text{cord}}(z, \infty)$.

1.2. Formes différentielles dans un ouvert du plan complexe

1.2.1. Champs de vecteurs et 1-formes différentielles dans le plan

Soit (x, y) un point du plan \mathbb{R}^2 . Les opérateurs différentiels réels $(\partial/\partial x)_{(x,y)} = \partial/\partial x$ et $(\partial/\partial y)_{(x,y)} = \partial/\partial y$ (ils ne dépendent pas en fait de (x, y)) engendrent un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2, appelé *plan tangent* en (x, y) au plan \mathbb{R}^2 . Ce plan tangent est indépendant de (x, y) ; c'est le \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2 :

$$T_{\mathbb{R}^2} := \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x} \oplus \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Son dual $T_{\mathbb{R}^2}^*$ est appelé *espace cotangent* au point courant (x, y) de \mathbb{R}^2 (cet espace ne dépend pas du point (x, y)). La base duale de la base $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y\}$ est notée (dx, dy) .

DÉFINITION 1.1 (champs de vecteurs, 1-formes différentielles). Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et U un ouvert de \mathbb{R}^2 . Une application ξ de classe C^k de U dans le complexifié $\mathbb{C} \partial/\partial x \oplus \mathbb{C} \partial/\partial y$ du plan tangent $T_{\mathbb{R}^2}$ est appelée *champ de vecteurs de classe C^k* , à valeurs complexes, dans U . Une application ω de classe C^k de U dans le complexifié $\mathbb{C} dx \oplus \mathbb{C} dy$ de l'espace cotangent $T_{\mathbb{R}^2}^*$ est appelée *1-forme différentielle de classe C^k* , ou encore *forme différentielle de degré 1*, à valeurs complexes, dans U . Si le champ de vecteurs (*resp.* la 1-forme différentielle) prend ses valeurs dans $T_{\mathbb{R}^2}$ (*resp.* dans $T_{\mathbb{R}^2}^*$), le champ (*resp.* la 1-forme) est dit réel (*resp.* réelle).

1. Ce petit résultat paraît anodin, mais s'avère bien utile dans les procédures algorithmiques enchaînant les multiplications de nombres complexes, par exemple les algorithmes de transformation de Fourier rapide opérant la multiplication d'un vecteur de \mathbb{C}^{2^M} avec la matrice symétrique $[\exp(-2i\pi kl/2^M)]_{0 \leq k, l \leq 2^M - 1}$, d'usage très courant aujourd'hui, par exemple en traitement de l'information, en algorithmique, ou en analyse des signaux ou des images

Remarque 1.2. Dans le contexte plus général d'une surface différentiable Σ différentiable (telle que par exemple la sphère de Riemann introduite dans la section 1.1.2 avec son atlas $\{(\mathbb{S}^2 \setminus N, \pi^+), (\mathbb{S}^2 \setminus S, \pi^-)\}$ et présentée dans cette section comme sous-variété de \mathbb{R}^3), le plan tangent $T_X(\Sigma)$ en un point $X \in \Sigma$ s'interprète comme le \mathbb{R} -espace vectoriel (de dimension 2) des dérivations au point X de l'algèbre $\mathcal{E}_{\Sigma, X}$ des germes en X de fonctions C^∞ et à valeurs réelles définies sur la surface Σ au voisinage de X . Une *dérivation* de $\mathcal{E}_{\Sigma, X}$ est une application \mathbb{R} -linéaire D de $\mathcal{E}_{\Sigma, X}$ dans \mathbb{R} , sepliant à la règle de Leibniz

$$D(uv) = u(X)D(v) + v(X)D(u) \quad \forall (u, v) \in \mathcal{E}_{\Sigma, X}.$$

Dans le cas particulier $\Sigma = \mathbb{R}^2$, on retrouve bien le fait que le plan tangent ne dépende pas de X et soit engendré par les deux opérateurs différentiels $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$. L'espace cotangent $T_X^*(\Sigma)$ au point X de Σ est le \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2 défini comme le dual de l'espace tangent $T_X(\Sigma)$. Les notions de champ de vecteurs et de 1-forme différentielle s'étendent à ce nouveau contexte, un champ de vecteurs dans un ouvert U de Σ étant une section au dessus de U du *fibré tangent* $T(\Sigma)$ (la fibre au dessus du point courant X étant le \mathbb{R} -plan vectoriel $T_X(\mathbb{R})$), tandis qu'une 1-forme différentielle dans U est une section au dessus de U du *fibré cotangent* $T^*(\Sigma)$ (la fibre au dessus du point courant X étant cette fois de \mathbb{R} -plan $T_X^*(\Sigma)$). La différence majeure avec le cas « plat » $\Sigma = \mathbb{R}^2$ est que cette fois plan tangent et plan cotangent varient avec le point courant $X \in \Sigma$.

Revenons pour ne plus le quitter pour l'instant au cas « plat » de \mathbb{R}^2 . Un champ de vecteurs ξ de classe C^k , à valeurs complexes, dans un ouvert U de \mathbb{R}^2 , s'exprime donc (de manière unique car $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$ constituent une base de $T_{\mathbb{R}^2}$) sous la forme

$$(1.15) \quad \xi(x, y) = \alpha(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \beta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad \forall (x, y) \in U,$$

où les applications coordonnées α et β sont des applications de classe C^k de U dans \mathbb{C} . De même, une 1-forme différentielle ω de classe C^k , à valeurs complexes, dans ce même ouvert U de \mathbb{R}^2 , s'exprime (de manière unique car dx et dy constituent une base de $T_{\mathbb{R}^2}^*$) sous la forme

$$(1.16) \quad \omega(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad \forall (x, y) \in U,$$

où P et Q sont des fonctions de classe C^k de U dans \mathbb{C} . La 1-forme différentielle $\omega = P dx + Q dy$ (de classe C^k dans U) agit sur le champ de vecteurs (de classe C^k dans U) $\xi = \alpha \partial/\partial x + \beta \partial/\partial y$ en produisant la fonction, elle aussi de classe C^k (de U dans \mathbb{C}) :

$$(x, y) \in U \mapsto \langle \omega(x, y), \xi(x, y) \rangle_{(x, y)} = P(x, y) \alpha(x, y) + Q(x, y) \beta(x, y).$$

En utilisant les relations (1.2), il est utile de remarquer que la 1-forme $P dx + Q dy$ s'exprime aussi sous la forme

$$P dx + Q dy = A dz + B d\bar{z},$$

où

$$(1.17) \quad \begin{aligned} dz &:= dx + idy & d\bar{z} &:= dx - idy \\ A &:= \frac{P - iQ}{2} & B &:= \frac{P + iQ}{2}. \end{aligned}$$