

# Table des matières

---

## *CHAPITRE 1 : GEOMETRIE AFFINE ALGEBRIQUE*

<b>I. Espaces affines et euclidiens formels</b>	<b>2</b>
1. Espaces affines formels	2
1.1 Définition des objets élémentaires en géométrie formelle	2
1.2 Colinéarité et alignement en géométrie formelle	3
1.3 Propriétés équivalentes en géométrie formelle	8
1.4 Applications	9
2. Produit scalaire en géométrie formelle	11
2.1 Intoduction du produit scalaire	11
2.2 Conséquences immédiates	12
2.3 Orthocentre d'un triangle	13
2.4 Hyperplan médiateur	14
2.5 Inégalité de Cauchy-Schwarz	15
2.6 Alignement et relation d'Euler dans un triangle	15
3. Coordonnées barycentriques	16
3.1 Coordonnées barycentriques planes	17
3.2 Application à l'alignement de trois points	17
3.3 Le théorème de Ménélaus	18
3.4 Le théorème de Céva	19
3.5 Applications	20
3.6 Droites parallèles, droites concourantes	23
3.7 Application au quadrilatère complet	25
<b>II. Géométrie analytique</b>	<b>27</b>
1. Alignement dans un espace affine de dimension finie	27
1.1 Généralités	27
1.2 Ecriture de la fonction	27
1.3 Application	28

2. Théorème de Thalès dans le plan	29
2.1 Triangles semblables	29
2.2 Le théorème de Thalès en calcul formel	30
3. Droites et hyperplans	31
3.1 Paramétrage et équations cartésiennes	31
3.2 Faisceau linéaire d'hyperplans	33
3.3 Propriétés en dimension 2 ou 3	34
3.4 Applications	34
4. Applications affines en dimension finie	36
4.1 Généralités sur les applications affines	37
4.2 Projections affines	38
4.3 Symétries affines	40
4.4 Affinités et dilatations	41
4.5 Transvections affines	44
5. Orthogonalité	46
5.1 Généralités	46
5.2 Exemples	47
5.3 Applications	48
6. Problèmes de distances	51
6.1 Distance d'un point à une variété affine	51
6.2 Distance de deux variétés affines	52
6.3 Exemples	52
<b>III. Géométrie plane euclidienne</b>	<b>55</b>
1. Trigonométrie	55
1.1 Cosinus et sinus de l'angle de deux vecteurs	55
1.2 Formulaire élémentaire de trigonométrie	55
2. Propriétés métriques dans un triangle	56
2.1 Les fonctions de base	56
2.2 Orthocentre d'un triangle	59
2.3 Cercle circonscrit à un triangle	59
2.4 Droite et cercle d'Euler dans un triangle	60
2.5 Bissectrices dans un triangle	63
2.6 Aire d'un triangle	69
3. Droites de Simson et de Steiner dans un triangle	72
3.1 Droite de Simson	72
3.2 Droite de Steiner	73

4. Cercles d'un plan affine euclidien	74
4.1 Puissance d'un point par rapport à un cercle	74
4.2 Faisceaux linéaires de cercles	77
5. Chaînes de cercles	79
5.1 Généralités sur les chaînes de cercles	79
5.2 Construction de chaînes de cercles	80
<b>IV. Nombres complexes en géométrie</b>	<b>82</b>
1. Birapport en géométrie affine	82
1.1 Birapport de quatre nombres complexes	82
1.2 Divisions harmoniques	83
1.3 Birapport de quatre points	84
1.4 Birapport de quatre droites et polaire d'un point	87
2. Droite et cercle d'Euler d'un triangle	88
2.1 Produit scalaire et nombres complexes	88
2.2 Droite d'Euler dans un triangle	88
2.3 Programmation	90
2.4 Le cercle des neuf points d'Euler	91
3. Package de fonctions	92
3.1 Fonctions du package	92
3.2 Similitudes planes directes	94
3.3 Applications	96
3.4 Inversion	104
4. Théorème de Morley	107
4.1 Démonstration	107
4.2 Triangles de Morley de périmètre maximal	109
<b>V. Géométrie euclidienne en dimension 3</b>	<b>111</b>
1. Orthogonalité	111
1.1 Projection et symétrie orthogonale par rapport à un plan	111
1.2 Orthocentre d'un triangle	113
1.3 Perpendiculaire commune à deux droites	115
2. Distances et angles	119
2.1 Calculs de distances	119
2.2 Sphère circonscrite à un tétraèdre	119

2.3	Tétraèdre équi-facial	120
2.4	Tétraèdre orthocentrique	123
2.5	Autres applications	129
3.	Isométries	134
3.1	Caractérisation d'une isométrie	134
3.2	Déplacements, antidéplacements	135
3.3	Reconnaître une isométrie affine	135
3.4	Définition analytique d'une isométrie	137
3.5	Etude géométrique des isométries	140
<b>VI.</b>	<b>Exercices</b>	<b>146</b>

## ***CHAPITRE 2 : ETUDE DES COURBES***

<b>I.</b>	<b>Arcs paramétrés et courbes</b>	<b>172</b>
1.	Propriétés affines des arcs paramétrés	172
1.1	Courbes unicursales	172
1.2	Plan osculateur à un arc birégulier en dimension 3	176
2.	Enveloppe d'une famille de droites	178
2.1	Théorie mathématique	178
2.2	Enveloppe avec Mathematica	179
2.3	Exemples d'enveloppes	179
3.	Ensembles remarquables	183
3.1	Podaire d'un arc par rapport à un point	183
3.2	Orthoptique d'une courbe	189
<b>II.</b>	<b>Etude des coniques</b>	<b>193</b>
1.	Coniques d'un plan affine	193
1.1	Définitions et notations	193
1.2	Coniques à centre	195
1.3	Le type d'une conique	196
1.4	Réduction de l'équation dans un espace euclidien	197
1.5	Exemples de coniques d'un plan euclidien	198
1.6	Tangente à une conique propre	200

2. Propriétés géométriques des coniques	201
2.1 Foyer et directrice d'une conique	201
2.2 Propriétés bifocales des coniques	204
2.3 Equation polaire des coniques	206
3. Exercices fondamentaux sur les coniques	207
3.1 Paraboles	207
3.2 Hyperboles équilatères	210
3.3 Ellipses	213
<b>III. Propriétés métriques des arcs</b>	<b>215</b>
1. Arcs paramétrés plans	215
1.1 Longueur et abscisse curviligne	215
1.2 Repère de Frenet, courbure	216
1.3 Développée et développantes d'un arc	218
1.4 Equation intrinsèque d'un arc	223
2. Arcs en dimension 3	228
2.1 Repère de Frenet	228
2.2 Rayon de courbure et rayon de torsion	229
2.3 Autre méthode de calcul	230
2.4 Applications	231
3. Etude locale de l'intersection de deux surfaces	234
<b>IV. Exercices</b>	<b>237</b>

## ***CHAPITRE 3 : ETUDE DES SURFACES***

<b>I. Nappes paramétrées et surfaces</b>	<b>270</b>
1. Nappes paramétrées	270
1.1 Surface de Dini	270
1.2 Exemple de paramétrage de surface	271

2. Equation cartésienne d'une surface	272
2.1 Représentation graphique d'une surface définie implicitement	272
2.2 Equation cartésienne en calcul formel	273
3. Plan tangent à une surface	276
3.1 Plan tangent en un point régulier d'une nappe	276
3.2 Cas d'une surface définie implicitement	278
3.3 Pont entre nappe paramétrée et surface définie implicitement	280
<b>II. Surfaces coniques</b>	<b>281</b>
1. Equation cartésienne d'un cône	281
1.1 Exemple	281
1.2 Généralisation	282
2. Reconnaître un cône à partir d'une équation cartésienne	282
2.1 Les outils	283
2.2 Applications	284
3. Contour apparent vu d'un point	284
3.1 Définitions	284
3.2 Programmation du contour apparent	285
3.3 Cône circonscrit à une surface algébrique	285
<b>III. Surfaces cylindriques</b>	<b>290</b>
1. Equation cartésienne d'un cylindre	290
1.1 Exemples	290
1.2 Généralisation	291
2. Reconnaître un cylindre à partir d'une équation cartésienne	292
3. Cylindre circonscrit à une surface	293
3.1 Définitions	293
3.2 Programmation	293
3.3 Cylindre circonscrit à une sphère	293
3.4 Autre méthode	294
3.5 Contour apparent cylindrique	295

<b>IV. Surfaces de révolution</b>	296
1. Reconnaître une surface de révolution	296
1.1 Programmation	296
1.2 Applications	297
1.3 Réduction de l'équation d'une surface de révolution	300
2. Equation cartésienne d'une nappe de révolution	302
2.1 Première méthode	302
2.2 Autre méthode	305
<b>V. Etude des quadriques</b>	308
1. Préliminaires	308
2. Quadriques à centre	309
2.1 Etude mathématique	309
2.2 Les diverses quadriques à centre	309
2.3 Les fonctions sous Mathematica	310
2.4 Applications	312
2.5 Classification avec Mathematica	316
3. Autres types de quadriques	320
3.1 Résultats mathématiques	320
3.2 Exemples	320
3.3 Compléments sur les quadriques réglées	324
<b>VI. Nappes réglées et développables</b>	325
1. Nappes réglées	325
1.1 Définitions	325
1.2 Reconnaître une nappe réglée	325
1.3 Exemples de nappes réglées	325
1.4 Cas des surfaces définies implicitement	327
2. Nappes développables	327
2.1 Définition	327
2.2 Développable des tangentes à un arc	327
2.3 Reconnaître une nappe développable	328
2.4 Exemples	328
2.5 Enveloppe d'une famille de plans	329

3. Conoïdes	330
3.1 Définition d'un conoïde	330
3.2 Conoïde circonscrit à une quadrique	331
3.3 Généralisation	334
3.4 Reconnaître un conoïde droit	335
3.5 Courbe génératrice d'un conoïde	335
3.6 Autres conoïdes	337
<b>VII. Exercices</b>	339
<b>Bibliographie</b>	373
<b>Index</b>	375