Chapitre 1
Stabilité des systèmes linéaires

Pierre-Simon **Laplace** est considéré comme un des plus grands mathématiciens et physiciens de la fin du XVIIIe et du début du XIXe siècle. Cependant, sa véritable passion fut l'astronomie. Ses travaux sur la gravitation universelle l'ont amené à étudier de nombreuses méthodes de calcul, en particulier dans le domaine des équations différentielles. Son nom reste attaché à la théorie du déterminisme suivant laquelle l'avenir du monde est entièrement déterminé par son état actuel.

Pierre-Simon Laplace
1749-1827

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les critères caractérisant le fonctionnement linéaire d'un système
- ▷ La représentation spectrale d'un signal périodique et sa signification
- ▷ La signification de la fonction de transfert
- ▷ Les critères de stabilité d'un système linéaire

■ Ce qu'il faut savoir faire

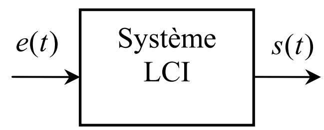
- ▷ Déterminer une fonction de transfert
- ▷ Identifier la nature d'un filtre à partir du schéma ou de la fonction de transfert
- ▷ Prévoir le signal de sortie ainsi que sa composition spectrale à partir de la fonction de transfert
- ▷ Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel ou temporel
- ▷ Discuter la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2

Résumé de cours

Le système linéaire continu invariant

Définitions

Soit un **système** (circuit électrique, machine, …) donnant à une entrée $e(t)$ une réponse $s(t)$ en sortie.



De manière générale, e et s peuvent être des grandeurs électriques, mécaniques, thermodynamiques… Par exemple $e(t)$ peut être le courant d'alimentation d'un moteur, et $s(t)$ la vitesse de rotation de ce moteur.

L'étude est ici limitée aux **systèmes linéaires, continus, invariants** :

→ **Linéaire** : si une entrée $e_1(t)$ donne une réponse en sortie $s_1(t)$ et une entrée $e_2(t)$ donne une réponse en sortie $s_2(t)$, alors une entrée $k_1 e_1(t) + k_2 e_2(t)$ avec k_1 et k_2 constantes donnera une sortie $k_1 s_1(t) + k_2 s_2(t)$;

→ **Continu** : les grandeurs étudiées sont définies pour tout temps ;

→ **Invariant** : son comportement dans le temps reste inchangé ; si l'on reproduit une même entrée à deux instants différents, les réponses seront identiques (décalées de ce même temps).

Propriété

Soit un signal d'entrée sinusoïdal permanent $e(t) = e_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Une propriété remarquable des systèmes linéaires (en régime permanent) est de donner nécessairement en sortie un signal également **sinusoïdal** et de **même pulsation** ω qui s'écrit donc $\mathrm{s}(t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi')$. On dit que les signaux sinusoïdaux sont des fonctions isomorphes des systèmes linéaires.

Prévoir la réponse en sortie d'un système LCI se résume donc à rechercher (s_0 / e_0) rapport des amplitudes, et $(\varphi' - \varphi)$ le déphasage.

La fonction de transfert

Fonction de transfert

Introduisons les notations complexes associées respectivement à $e(t)$ et $s(t)$:

$\underline{e} = e_0 \exp\big(j(\omega t + \varphi)\big) = \underline{E} \exp(j\omega t)$ avec $\underline{E} = e_0 \exp(j\varphi)$ et

$\underline{s} = s_0 \exp\big(j(\omega t + \varphi')\big) = \underline{S} \exp(j\omega t)$ avec $\underline{S} = s_0 \exp(j\varphi')$.

La fonction de transfert est par définition : $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}} = \dfrac{s_0}{e_0} e^{j(\varphi' - \varphi)}}$

⇨ **Méthode 1.1. Calcul de la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel**

Compte tenu de la propriété d'isomorphisme précédemment citée, pour déterminer, en régime permanent, le signal de sortie $s(t)$ réponse d'un signal $e(t)$ sinusoïdal, il suffit de connaître $\underline{H}$ à ω :

$\rightarrow$ le module de $\underline{H}$, appelé **gain**, donne (s_0 / e_0) rapport des amplitudes ;

$\rightarrow$ l'argument de $\underline{H}$ donne $(\varphi'-\varphi)$, appelé **avance de phase** (ou déphasage) du signal de sortie sur le signal d'entrée.

Dans le domaine temporel, un signal d'entrée $e(t)=e_0\cos(\omega t+\varphi)$ donne donc une réponse $\boxed{\mathrm{s}(t)=s_0\cos(\omega t+\varphi')=\left|\underline{H}\left(j\omega\right)\right|\mathrm{e}_0\cos\left(\omega t+\varphi+\arg\left(\underline{H}\left(j\omega\right)\right)\right)}$.

⇨ **Méthode 1.6. Détermination du signal de sortie en régime établi**

❑ Systèmes régis par une équation différentielle à coefficients constants

$\rightarrow$ Dans le cas d'un circuit électronique associant par exemple des composants R, L ou C, les relations liants tensions et courants peuvent s'écrire dans le domaine temporel sous forme d'équations différentielles linéaires : $u=Ri$, $u=L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, $i=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. En les combinant judicieusement à l'aide de la loi des mailles et de la loi des nœuds, il est toujours possible d'obtenir une équation différentielle linéaire à coefficients constants reliant $s(t)$ à $e(t)$ de la forme :

$$b_0 s(t)+b_1\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}+b_2\frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2}+\ldots+b_n\frac{\mathrm{d}^n s(t)}{\mathrm{d}t^n}=a_0 e(t)+a_1\frac{\mathrm{de}(t)}{\mathrm{d}t}+a_2\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{e}(t)}{\mathrm{d}t^2}+\ldots+a_m\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{e}(t)}{\mathrm{d}t^m}.$$

L'ordre du filtre est n avec $n\geq m$. Nous nous limiterons à l'ordre 2 pour la suite.

⇨ **Méthode 1.2. Détermination directe de l'équation différentielle dans le domaine temporel**

$\rightarrow$ Utilisons maintenant les notations complexes (domaine fréquentiel). Remarquant que la dérivée temporelle de $\exp(j\omega t)$ est $j\omega\cdot\exp(j\omega t)$, l'équation différentielle se simplifie :

$$b_0\,\underline{s}+b_1\,j\omega\,\underline{s}+b_2\left(j\omega\right)^2\underline{s}=a_0\,\underline{e}+a_1\,j\omega\,\underline{e}+a_2\left(j\omega\right)^2\underline{e}\ \text{ soit : }\boxed{\underline{H}=\frac{\underline{s}}{\underline{e}}=\frac{a_0+a_1\,j\omega+a_2(j\omega)^2}{b_0+b_1\,j\omega+b_2(j\omega)^2}}$$

La fonction de transfert se présente donc sous la forme d'une fraction rationnelle de $j\omega$.

❑ Notation de Laplace et transposition entre domaine temporel et domaine fréquentiel

On utilise la notation symbolique de Laplace $H(p)$, p valant $j\omega$ dans le domaine fréquentiel, mais p étant aussi l'opérateur $[\mathrm{d}/\mathrm{d}t]$ dans le domaine temporel. Il est ainsi possible de passer facilement de la fonction de transfert à l'équation différentielle et réciproquement :

$$\boxed{H(p)=\frac{a_0+a_1\,p+a_2\,p^2}{b_0+b_1\,p+b_2\,p^2}}\Leftrightarrow\boxed{\left[b_0+b_1\,p+b_2\,p^2\right]\mathrm{s}(t)=\left[a_0+a_1\,p+a_2\,p^2\right]e(t)}\ \text{avec}\ \boxed{p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$$

⇨ **Méthode 1.3. Détermination de l'équation différentielle dans le domaine temporel à partir de la fonction de transfert**

■ La stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2

❑ Étude à partir de l'équation différentielle

Pour une entrée $e(t)$ donnée, la solution $s(t)$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $b_0 s(t) + b_1 \dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + b_2 \dfrac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = a_0 e(t) + a_1 \dfrac{\mathrm{de}(t)}{\mathrm{d}t} + a_2 \dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{e}(t)}{\mathrm{d}t^2}$ est la somme de :

→ une solution particulière $s_P(t)$ de l'équation complète ;

→ la solution générale $s_H(t)$ de l'équation homogène $b_0 s(t) + b_1 \dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + b_2 \dfrac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0$.

Un système est stable lorsque : $\boxed{s_H(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0}$.

La réponse s(t) d'un système stable présente alors 2 phases :
→ au début, le régime transitoire est décrit par $s(t) = s_P(t) + s_H(t)$;
→ au bout d'un certain temps $s_H(t) \simeq 0$: le régime permanent (ou établi) est atteint, et $s(t) = s_P(t)$. Le régime établi d'un système stable est décrit par la solution particulière.

Remarque

Pour un signal permanent en entrée $e(t)$ d'un système stable, on se contente de rechercher le signal **permanent** $s_P(t)$. La notion de filtre n'a de sens que pour les systèmes stables. Dans ce cas, il n'est pas utile d'expliciter le régime transitoire.
Par contre, dans le cas où $s_H(t)$ ne tend pas vers 0, **le régime permanent** $s_P(t)$ **n'est jamais atteint : le système est instable**.
C'est donc l'étude du régime transitoire qui permet de déterminer la stabilité d'un système.

→ Stabilité d'un système d'ordre 1
L'équation homogène s'écrit $b_0 \mathrm{s}(t) + b_1 p \mathrm{s}(t) = 0$ avec $\mathrm{p} = [\mathrm{d}/\mathrm{d}t]$, dont la solution est $s_H(t) = \mathrm{A}\exp(-b_0 / b_1)$, qui tend vers 0 si et seulement si b_0 et b_1 sont de même signe.

→ Stabilité d'un système d'ordre 2
L'équation homogène s'écrit $\left[b_0 + b_1 p + b_2 p^2\right]\mathrm{s}(t) = 0$. On remarque que l'écriture avec les notations de Laplace donne directement l'équation caractéristique $b_0 + b_1 p + b_2 p^2 = 0$. Il existe 3 types de solutions selon le signe du Δ_{EC} (régime apériodique, critique ou pseudo-périodique). Dans tous les cas, les termes en exponentiel doivent tendre vers 0 pour avoir stabilité. Mathématiquement, cela se traduit par la partie réelle des 2 solutions de l'équation caractéristique qui doivent être négatives. On peut vérifier que c'est le cas si et seulement si b_0, b_1 et b_2 sont de même signe.

En conclusion, un système d'ordre 1 ou 2 est stable si et seulement si les coefficients de l'équation différentielle homogène sont de même signe.

⇨ **Méthode 1.9. Étude de la stabilité dans le domaine temporel**

❑ Étude à partir de la fonction de transfert

En revenant à la notation de Laplace $H(p)=\dfrac{a_0+a_1 p+a_2 p^2}{b_0+b_1 p+b_2 p^2}$, on remarque que les coefficients de l'équation homogène apparaissent directement au dénominateur.

Un système d'ordre 1 ou 2 est stable si et seulement si les coefficients b_i du polynôme au dénominateur de $\underline{H}$ sont de même signe.

Remarque

Dans le cas d'un circuit ne contenant que des éléments passifs, le système est nécessairement stable. La seule exception envisageable est le cas d'un circuit sans aucune résistance (LC par exemple), qui est purement théorique. Hormis cette exception, il faut utiliser au moins un composant actif tel un ALI (voir chapitre suivant) pour apporter de l'énergie et déstabiliser le système.

Nous nous placerons dans le cas d'un système stable pour la suite du résumé de cours, et nous limiterons donc l'étude au régime permanent (ou établi).

⇨ **Méthode 1.8. Étude de la stabilité dans le domaine fréquentiel à l'aide de la fonction de transfert**

■ Le signal périodique non sinusoïdal

❑ La décomposition en série de Fourier d'un signal périodique

J. Fourier a déterminé que tout signal périodique de période T_0 peut se décomposer en une somme infinie de sinus et de cosinus, appelée série de Fourier :

$$\boxed{e(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(n\,\omega_0 t+\varphi_n\right)} \text{ avec } \omega_0=2\pi/T_0,$$

qui peut aussi s'écrire $e(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(n\omega_0 t\right)+b_n\sin\left(n\omega_0 t\right)\right)$.

c_0 est la **composante continue** (valeur moyenne du signal), ω_0 est la pulsation la plus basse que l'on appelle **fondamentale**. Les termes de pulsation $\omega_n=n\,\omega_0$ sont les **harmoniques de rang** n.

❑ Détermination du signal de sortie et notion de filtrage

Tout signal périodique $e(t)$ peut s'écrire sous forme de série de Fourier, et l'on sait déterminer la réponse en sortie pour chaque signal sinusoïdal placé en entrée. La série de Fourier du signal de sortie $s(t)$ est donc simplement la somme des réponses correspondant à chaque terme de la série de $e(t)$.

$$e(t) = c_0 + c_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + c_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + c_3 \cos(3\omega_0 t + \varphi_3) + \ldots$$

Système

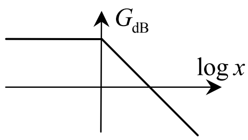
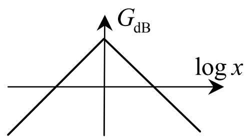
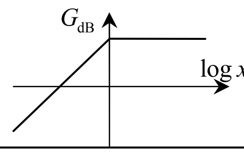
LCI

$$\mathrm{s}(t) = c_0 \left|\underline{H}(\omega = 0)\right| + c_1 \left|\underline{H}(\omega_0)\right| \cos\left(\omega_0 t + \varphi_1 + \arg\left(\underline{H}(\omega_0)\right)\right) + c_2 \left|\underline{H}(2\omega_0)\right| \cos\left(2\omega_0 t + \varphi_1 + \arg\left(\underline{H}(2\omega_0)\right)\right) + c_3 \left|\underline{H}(3\omega_0)\right| \cos\left(3\omega_0 t + \varphi_1 + \arg\left(\underline{H}(3\omega_0)\right)\right) + \ldots$$

⇨ **Méthode 1.6. Détermination du signal de sortie en régime établi**

❑ Modèles simples de filtres passifs

On se reportera à l'étude faite en première année. Seuls les principaux types de filtres d'ordre 1 et 2 sont rappelés ici. Notons $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite, et Q le facteur de qualité.

	Filtre passe-bas	Filtre passe-bande	Filtre passe-haut
Gabarit			
Filtre d'ordre 1	$H_0 \dfrac{1}{1 + jx}$	N'existe pas	$H_0 \dfrac{jx}{1 + jx}$
Filtre d'ordre 2	$H_0 \dfrac{1}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$	$H_0 \dfrac{j\dfrac{x}{Q}}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$	$H_0 \dfrac{-x^2}{1 + j\dfrac{x}{Q} - x^2}$

Dans le diagramme de Bode, les pentes des filtres d'ordre 1 ne peuvent pas dépasser ± 20 dB par décade, et les filtres d'ordre 2 ± 40 dB par décade.

■■ Méthodes

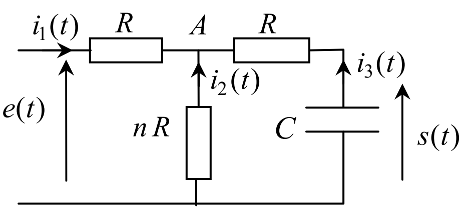
■ Comment déterminer la relation entrée/sortie d'un filtre linéaire ?

❑ Méthode 1.1. Calcul de la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel

→ Il faut se placer dans le domaine fréquentiel et donc utiliser les impédances complexes.
On applique le pont diviseur de tension quand c'est possible pour obtenir des relations entre les tensions. Quand ce n'est pas possible (au moins 3 branches à un nœud), on applique la loi des nœuds exprimée en terme de potentiel (toutes les intensités sont remplacées par $\underline{u}/\underline{Z}$). Cela donne un système de plusieurs équations à plusieurs inconnues. Il ne faut en aucun cas faire intervenir des courants dans les équations car cela ajoute des inconnues inutiles !
Ensuite, par substitution, éliminer les inconnues pour ne garder que $\underline{e}$ (entrée) et $\underline{s}$ (sortie). $\underline{s}/\underline{e}$ donne la fonction de transfert.
→ Dans le cas où l'équation différentielle entre $s(t)$ et $e(t)$ a déjà été préalablement déterminée, il suffit de la transposer dans le domaine fréquentiel en remplaçant l'opérateur $[\mathrm{d}/\mathrm{d}t]$ par p, puis en déduire s/e.

⇨ **Exercices 1.2 et 1.4**

Calculons la fonction de transfert du circuit (1) dans le domaine fréquentiel.
Plaçons la masse ($v = 0$) sur le fil du bas, et notons v_A le potentiel du nœud A.
Un pont diviseur de tension en sortie s donne $\underline{s} = \dfrac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + R}\underline{v}_A$ (2). L'introduction d'un potentiel inconnu $\underline{v}_A$ oblige à rechercher une équation supplémentaire. Celle-ci est obtenue en appliquant la loi des nœuds exprimée avec les potentiels. $\underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3 = 0$ arrivant en A s'écrit :



Circuit (1)

$$\frac{\underline{e} - \underline{v}_A}{R} + \frac{0 - \underline{v}_A}{nR} + \frac{\underline{s} - \underline{v}_A}{R} = 0 \text{ soit } \underline{v}_A = \frac{n}{2n+1}\left(\underline{e} + \underline{s}\right).$$