Chapitre 1
Champ électrostatique

Expérimentateur très rigoureux, Charles **Coulomb** se consacre, à partir de 1781, essentiellement à l'étude de la physique. Grâce à des expériences précises et rigoureuses, il étudie la distribution des charges électriques sur une surface et établit les lois qui régissent l'attraction et la répulsion des charges électriques et des pôles magnétiques. Il construit en particulier une balance électrique grâce à laquelle il établit de manière expérimentale que l'attraction des charges électriques est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance. Fort justement, son nom est donné à l'unité de charge électrique dans le Système international.

Charles Coulomb
1736-1806

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

▷ La loi de Coulomb

▷ Les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de charge et les conséquences pour le champ électrostatique

▷ Le théorème de Gauss (pour le champ électrostatique et pour le champ gravitationnel) sous sa forme intégrale et locale

▷ La capacité d'un condensateur plan

■ Ce qu'il faut savoir faire

▷ Déterminer la direction d'un champ électrostatique, à partir des symétries de la distribution de charges

▷ Déterminer les coordonnées spatiales dont dépendent les composantes du champ, à partir des invariances de la distribution de charges

▷ Expliciter un champ électrostatique en utilisant le théorème de Gauss

▷ Trouver des informations sur le champ par lecture d'une carte des lignes de champ

■■ Résumé de cours

■ Interaction électrique et champ

❑ Charges électriques

La charge électrique est une grandeur scalaire intrinsèque, extensive et conservative, qui caractérise le comportement de la matière vis-à-vis de l'interaction électromagnétique ; elle peut être positive ou négative.

Elle est quantifiée : toutes les charges isolables sont multiples de la charge élémentaire $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$. La charge électrique est répartie de manière discontinue au niveau microscopique, là où sont les particules qui peuvent être considérées comme ponctuelles.

❑ Loi de Coulomb

En électrostatique, on s'intéresse à des charges immobiles les unes par rapport aux autres. Alors les forces exercées par des charges q_1 et q_2 l'une sur l'autre sont données par la loi de Coulomb :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2^3}}.$$

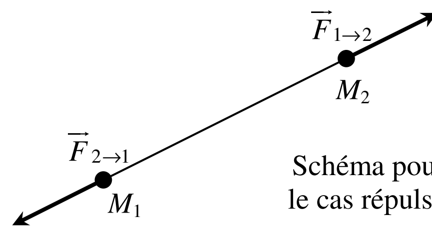


Schéma pour le cas répulsif

Elles sont attractives si les charges sont de signe opposé ($q_1\, q_2 < 0$) et répulsives si les charges sont de même signe ($q_1\, q_2 > 0$).

La constante ε_0 est la permittivité diélectrique du vide et vaut $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$.

❑ Notion de champ électrostatique

On peut décrire indirectement l'interaction électrique en faisant intervenir la notion de champ :

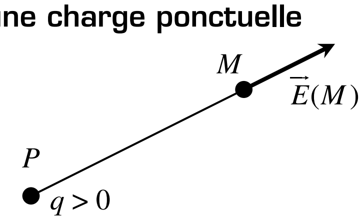
– des charges immobiles créent en un point M un champ électrostatique $\vec{E}(M)$;

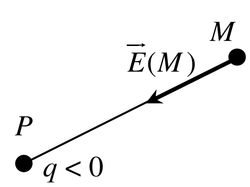
– une charge q placée au point M subit une alors une force électrique $\boxed{\vec{F}(M) = q\vec{E}(M)}$.

❑ Champ créé par une charge ponctuelle

Le champ créé en un point M par une charge q immobile en un point P est :

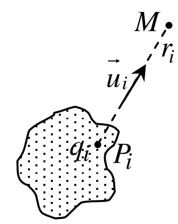
$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}.$$





❑ Principe de superposition, champ créé par une distribution discrète

Le champ créé par une charge est indépendant de la présence d'autres charges. De plus les forces s'additionnent vectoriellement, donc le champ créé par un ensemble de charges est la somme vectorielle des champs créés par chaque charge individuellement. Ainsi le champ créé en un point M par un ensemble de charges ponctuelles q_i situées aux points P_i est :



$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i\,\overrightarrow{P_iM}}{P_iM^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i\,\vec{u}_i}{r_i^2}} \text{ où } \vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|} \text{ et } r_i = \left\|\overrightarrow{P_iM}\right\|.$$

■ Champ créé par une distribution continue de charges

❑ Distribution volumique

Si $\mathrm{d}\tau(P)$ est un volume élémentaire contenant la charge $\mathrm{d}q(P)$ à l'instant t autour du point P d'une distribution de charge (D), on définit la densité volumique de charge par $\boxed{\rho(P) = \dfrac{\mathrm{d}q(P)}{\mathrm{d}\tau(P)}}$ en $\boxed{\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^{-3}}$. La charge totale de la distribution est alors obtenue par : $Q = \displaystyle\int_D \rho(P)\,\mathrm{d}\tau(P)$, où $\displaystyle\int_D$ désigne ici la triple sommation continue sur (D).

Remarque

La densité volumique $\rho(P)$ est définie à l'échelle mésoscopique, c'est-à-dire à une échelle de dimension assez faible à l'échelle macroscopique pour qu'elle soit localement représentative du milieu et de dimension suffisamment grande à l'échelle microscopique pour que la notion de moyenne ait un sens. Ainsi, $\rho(P)$ est une grandeur locale et moyennée. À cette échelle, la distribution est continue (l'aspect corpusculaire caractéristique de l'échelle atomique est lissé par le processus de moyenne), d'où l'usage de sommes continues.

❑ Distribution surfacique

La distribution surfacique est la limite d'une réalité volumique où les charges sont réparties sur une petite épaisseur a avec une densité volumique de ρ, la densité surfacique correspondante est, si la distribution est uniforme, $\sigma = \lim\limits_{a \to 0} \rho a$. La charge portée par une surface élémentaire $\mathrm{d}S$ centrée sur P s'écrit : $\boxed{\mathrm{d}q = \sigma(P)\,\mathrm{d}S}$, où $\sigma(P)$ est la **densité surfacique de charge** au point P.

❑ Distribution linéique

C'est la limite d'une réalité volumique « filiforme » lorsque sa section tend vers zéro.
La charge portée par un élément de longueur $\mathrm{d}l$ centré sur P s'écrit : $\boxed{\mathrm{d}q = \lambda(P)\,\mathrm{d}l}$, où $\lambda(P)$ est la **densité linéique de charge** au point P.

❑ Correspondance entre les éléments de charge

Les éléments de charges dans les descriptions volumique, surfacique et linéique sont liés par : $\boxed{\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}\tau = \sigma\,\mathrm{d}S = \lambda\,\mathrm{d}l}$.

■ Symétries de la distribution de charges et du champ

❑ Principe de Curie

Le principe de symétrie de Curie postule que « les effets ont au moins les symétries des causes ». Appliqué à l'électrostatique, ce principe implique donc que le champ électrostatique a au moins les mêmes symétries que la distribution de charges.

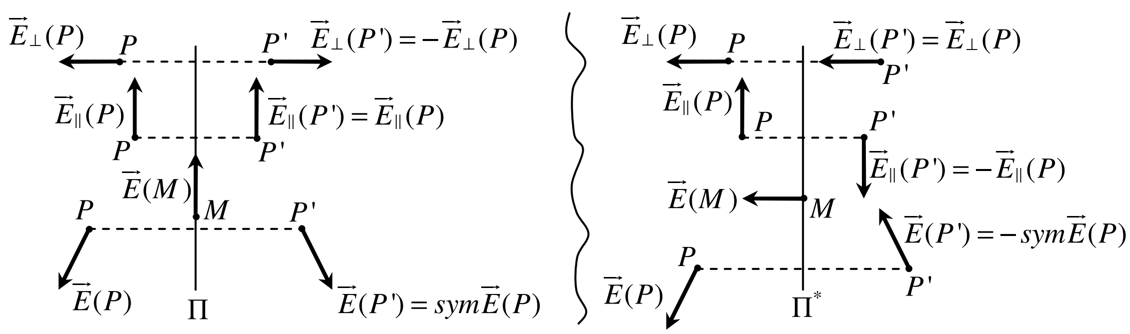
❑ Plans de symétrie et d'antisymétrie

Plan de symétrie

Un plan Π est plan de symétrie d'une distribution volumique de charges si, quels que soient les points P et P' symétriques par rapport à Π, $\rho(P') = \rho(P)$.

Ce plan est alors également un plan de symétrie pour le champ : $\vec{E}(P')$ est le symétrique de $\vec{E}(P)$, donc leurs composantes parallèles au plan sont égales et celles orthogonales au plan sont opposées.

En particulier, *en un point M d'un plan de symétrie, le champ est contenu dans ce plan.*



Plan d'antisymétrie

Un plan Π^* est plan d'antisymétrie d'une distribution volumique de charges si, pour tous points P et P' symétriques par rapport à Π^*, $\rho(P') = -\,\rho(P)$.

Ce plan est alors également un plan d'antisymétrie pour le champ : $\vec{E}(P')$ est l'opposé du symétrique de $\vec{E}(P)$, donc leurs composantes parallèles au plan sont opposées et celles orthogonales au plan sont égales.

En particulier, *en un point M d'un plan d'antisymétrie, le champ est orthogonal à ce plan.*

⇨ **Méthode 1.1. Comment déterminer la direction du champ ?**

❑ Invariances

Invariance par translation

Si la distribution de charges est invariante par translation selon un axe, le champ l'est aussi : il ne dépend donc pas de la coordonnée le long de cet axe.

Invariance par rotation autour d'un axe (symétrie de révolution)

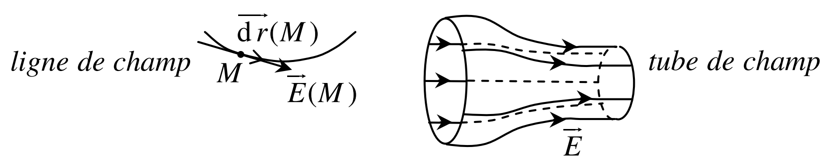
Si la distribution de charges est invariante par rotation autour d'un axe, les composantes du champ le sont aussi : elles ne dépendent donc pas de la coordonnée angulaire qui définit la rotation autour de cet axe.

Invariance par rotation autour d'un point (symétrie sphérique)
Si la distribution de charges est invariante par rotation autour d'un point, les composantes du champ le sont aussi : elles ne dépendent donc d'aucune coordonnée angulaire.

⇨ **Méthode 1.2. Comment déterminer les coordonnées dont dépendent les composantes du champ ?**

■ Lignes et tubes de champ

Une **ligne de champ** de $\vec{E}$ est une courbe tangente au champ $\vec{E}$ en chacun de ses points.
Équation d'une ligne de champ : elle est obtenue en écrivant que $\vec{E}$ est localement tangent à un élément $\mathrm{d}\vec{r}(M)$ de la ligne de champ au point M, c'est-à-dire en explicitant le fait que $\vec{E}(M)\wedge \mathrm{d}\vec{r}(M)=\vec{0}$ dans le système de coordonnées adapté aux symétries du problème.
Un plan de symétrie contient entièrement une infinité de lignes de champ.
Un plan d'antisymétrie est orthogonal aux lignes de champ en chacun de ses points.

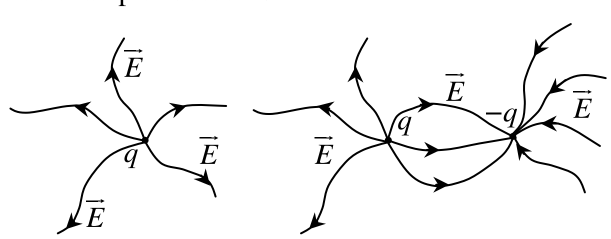


Un **tube de champ** est une surface (ouverte) formée par l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée. On peut le fermer à ses extrémités pour former une surface fermée.

⇨ **Méthode 1.3. Comment jongler avec l'orientation des surfaces ?**

❑ Topographie des lignes de champ

L'équation locale de (M.G) traduit le fait que $\vec{E}$ est à divergence non nulle en présence de charges c'est-à-dire de monopôles électrostatiques. Les lignes de champs de $\vec{E}$ divergent à partir du point *P* vers l'infini si la charge est positive et convergent vers *P* depuis l'infini si elle est négative. De façon plus générale, il apparaît que $\vec{E}$ diverge en partant de charges positives et converge vers des charges négatives électrostatiques ou vers l'infini comme le montre la cartographie des lignes de champ ci-dessous.



■ Théorème de Gauss

❑ Flux du champ électrostatique

Le flux du champ électrostatique au travers d'une surface Σ est par définition :

$$\Phi(\vec{E})_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}s\,\vec{n}\,.$$

$\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal (localement) à la surface Σ. Le choix du sens de $\vec{n}$ revient à orienter la surface, en fonction de l'orientation de son contour.

⇨ **Méthode 1.3. Comment jongler avec l'orientation des surfaces ?**

Si la surface n'est pas plane, $\vec{n}$ n'est pas partout le même mais il est toujours dirigé du même côté de la surface.

Pour une surface fermée (entourant complètement un certain volume), $\vec{n}$ est dirigé soit vers l'extérieur de la surface (on parle alors de flux sortant), soit vers l'intérieur (flux entrant).

❑ Théorème de Gauss

Le flux sortant du champ électrostatique au travers d'une surface fermée Σ est égal à la charge électrique totale contenue à l'intérieur de cette surface, divisée par la constante ε_0 :

$$\boxed{\oiint_\Sigma \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}s\,\vec{n} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}\,.$$

⇨ **Méthode 1.4. Utiliser le théorème de Gauss**

❑ Formulation locale du théorème de Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss (M.G) : $\mathrm{div}\left(\vec{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ soit $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ traduit localement le théorème de Gauss.

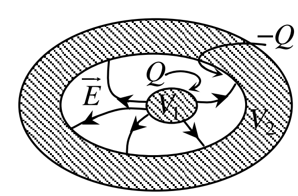
Remarque

Le théorème de superposition pour le champ découle de la linéarité de cette équation locale liant source et champ.

■ Condensateur

❑ Notion de condensateur

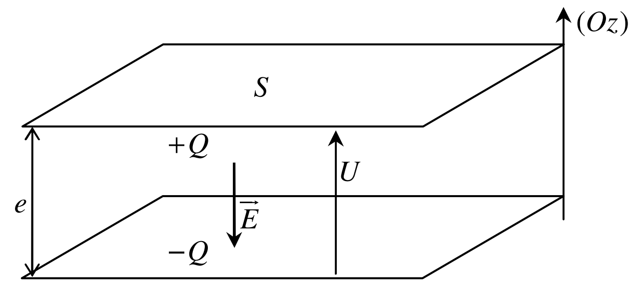
Deux conducteurs en regard, portés à des potentiels différents, forment un condensateur lorsque toutes les lignes de champ partant de la surface du conducteur de plus haut potentiel arrivent sur celle de plus bas potentiel. Les deux surfaces en regard, dites armatures du condensateur, portent alors des charges opposées. Cette définition impose dans la pratique que l'un des conducteurs est creux et entoure totalement l'autre. Dans le cas contraire, les **effets de bords doivent être négligés**.



$V_1 > V_2$

❑ Description et modélisation

Un condensateur plan est constitué de deux surfaces planes conductrices appelées armatures, placées l'une en face de l'autre et séparées par un isolant. On note S la surface des armatures et e la distance qui les sépare. On considère ici que l'isolant est le vide.



Lorsque le condensateur est chargé, ses armatures portent des charges égales en valeur absolue et de signe opposé $-Q$ et $+Q$, réparties uniformément sur les armatures avec des densités surfaciques $\pm\sigma = \pm\frac{Q}{S}$. Dans le cas où la distance entre les armatures est très inférieure à leurs dimensions, on peut modéliser le condensateur chargé par deux plans infinis uniformément chargés. Le champ électrostatique entre les armatures a pour expression :

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_z} = -\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\vec{e_z}}.$$

À l'extérieur des armatures : $\vec{E} = \vec{0}$.

❑ Capacité

La capacité d'un condensateur est le rapport entre la charge portée par l'armature positive et la différence de potentiel entre les armatures : $\boxed{C = \frac{Q}{U}}$.

Pour un condensateur plan : $\boxed{C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{e}}$.

❑ Théorème de Gauss pour le champ de gravitation

La loi de Coulomb et la loi de la gravitation en physique classique ont des expressions tout à fait analogues. On peut donc transposer les notions vues en électrostatique, et notamment le théorème de Gauss, aux forces de gravitation. Il suffit pour cela de remplacer les charges par les masses et la constante $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ par $-G$: $\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{\mathcal{G}}(M) \cdot \mathrm{d}s\,\vec{n} = -4\pi G M_{\text{int}}}$.

Dans cette expression, $\vec{\mathcal{G}}$ est le champ gravitationnel et $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ (SI) est la constante de gravitation.