Chapitre 1

Les nombres

1.1 Introduction

1.1.1 Des entiers naturels aux nombres réels

Le système décimal est presque universellement employé de nos jours. Les nombres y sont tous écrits au moyen de dix symboles élémentaires : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ce système a été inventé en Inde, probablement avant la fin du sixième siècle, et a été introduit en Occident grâce aux contacts avec le monde arabe, d'où le nom de chiffres arabes.

Il nous est maintenant si familier que peu de gens savent qu'il n'est devenu d'usage commun en Occident que relativement récemment : au seizième siècle.

Les chiffres romains, qui étaient utilisés jusque-là, subsistent encore marginalement. On s'en sert par exemple pour numéroter dans un livre les pages de l'avant-propos, ou pour indiquer dans un générique l'année de réalisation d'un film.

Mais quels sont les avantages du système décimal ? Et la base 10 contribue-t-elle à simplifier les calculs, ou n'est-ce qu'un accident de l'histoire, sans vraie importance ?

Après les nombres entiers naturels (1, 2, 3, etc.) sont apparus les fractions, les nombres irrationnels, le zéro et les nombres négatifs, ce qui a finalement donné l'ensemble des nombres réels. Mais pourquoi les a-t-on inventés ?

1.1.2 Plan du chapitre

La deuxième section traite principalement des systèmes de représentation des nombres entiers positifs.

Les nombres rationnels sont étudiés dans la troisième section. Ils peuvent être additionnés et multipliés comme les entiers. Pour clarifier et simplifier ces opérations, nous définissons les notions de plus grand commun diviseur, de plus petit commun multiple, de nombre premier et de factorisation.

Nous verrons dans la section 4 comment des arguments *géométriques* conduisent à introduire les nombres irrationnels.

Dans la section 5, nous discutons les raisons pour lesquelles les nombres négatifs ont été inventés, et nous motivons leurs règles de calcul.

La notation scientifique, exposée dans la section 6, simplifie l'écriture des très grands et des très petits nombres.

Dans la septième section, nous examinons quelles propriétés dépendent du système de représentation des nombres, et lesquelles n'en dépendent pas (et sont donc intrinsèques). Nous nous demandons ensuite si la base 10 est la meilleure.

Une section intitulée « Perspectives » évoquera des approfondissements traités plus loin ou dans des ouvrages plus avancés.

Nous terminons par une annexe sur des points moins importants ou plus difficiles, et par des exercices.

Des sections « Perspectives » et « Exercices » apparaîtront dans la plupart des chapitres et ne seront dorénavant plus mentionnées dans le plan.

1.2 Les nombres entiers positifs

1.2.1 Premiers comptages

La première activité mathématique a sans doute été le comptage d'objets ou d'animaux. Cela est possible et a du sens parce que ces objets ou animaux ont les propriétés suivantes :

— il est possible d'isoler des « individus » ;
— l'existence de ces individus a une certaine permanence dans le temps ;
— cette existence est préservée lorsqu'on les déplace, les regroupe ou les sépare.

Ces propriétés sont très répandues, et c'est cela qui a suscité l'introduction du concept de nombre abstrait, indépendant de l'objet compté.

L'apparition du nombre abstrait *après* celui du comptage d'objets est attestée par l'existence de langues où le nom du nombre dépend de l'objet auquel il se rapporte (cf. [2]).

Comment représenter le résultat d'un comptage ? Une façon simple est de faire sur un os ou un bâton autant d'encoches que d'objets. Les archéologues ont retrouvé de tels os datant d'environ 30 000 ans avant notre ère, bien avant l'invention de l'écriture.

Faire autant d'encoches que d'objets est évidemment peu commode s'il y en a beaucoup. C'est pourquoi diverses méthodes ont été inventées pour représenter les grands nombres sous une forme plus compacte. On distinguera ici :

— les systèmes *sans* principe de position ;
— les systèmes *avec* principe de position.

1.2.2 Systèmes de numération sans principe de position

La numération hiéroglyphique égyptienne, qui date d'environ 2900 ans av. J.-C. [23], est l'une des plus simples parmi celles sans principe de position. Elle ne comprend des symboles élémentaires que pour les puissances de 10, c'est-à-dire 1, 10, 100, 1000, etc. Cette table montre les premiers d'entre eux :

Nombre	1	10	100	…
Symbole hiéroglyphique	𓏺	𓎆	𓍢 ou 𓍢	…

Il y a deux possibilités pour le symbole non symétrique associé à 100, car l'égyptien s'écrivait aussi bien de gauche à droite que de droite à gauche.

Pour représenter un nombre, on répète chaque symbole autant de fois qu'il le faut pour que la somme des nombres associés à chaque symbole donne le total désiré. Ainsi, 234, qui est égal à $(2 \times 100) + (3 \times 10) + (4 \times 1)$, s'écrit comme

𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺 ou 𓏺𓏺𓏺𓏺 𓎆𓎆𓎆 𓍢𓍢

L'écriture de 99 requiert dix-huit symboles !

La numération romaine est dérivée de celle des Étrusques et date de plusieurs centaines d'années av. J.-C. Elle comprend des symboles élémentaires pour les puissances de 10, mais aussi pour les nombres de la forme $5 \times 10 \cdots \times 10$:

Nombre	1	5	10	50	100	500	1000	…
Symbole romain	I	V	X	L	C	D	M	…

Les nombres de 1 à 10 s'écrivent :

Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Écriture romaine	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X

Les symboles élémentaires romains s'additionnent donc (VI correspond à $5 + 1 = 6$), sauf lorsqu'un symbole est placé à gauche d'un de plus grande valeur (IV correspond à $5 - 1 = 4$) ; on évite ainsi de faire apparaître plus de trois fois de suite le même symbole.

Les règles pour les nombres plus grands sont expliquées dans l'annexe.

Cette complexité accrue a cependant un avantage : pour représenter un nombre, il faut en moyenne moins de symboles que dans le système égyptien.

Dans ces systèmes, il n'y a pas de zéro.

Diverses multiplicités

Bien que le nombre dix joue depuis longtemps un rôle central dans la plupart des systèmes de numération, d'autres multiplicités ont été employées et survivent dans certains contextes. Il y a sept jours dans la semaine, douze mois dans l'année, on vend les œufs à la douzaine, et dans l'ancien système de mesure (encore en usage dans le monde anglo-saxon), une toise valait six pieds, un pied valait douze pouces, et un pouce douze lignes. La multiplicité vingt apparaît dans le mot « quatre-vingts » (80) en français, les mots « twoscore », « threescore », et autres multiples de « score » (20) en anglais.

1.2.3 Systèmes de numération avec principe de position

Le système décimal

Dans le système décimal, les symboles élémentaires sont $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$. Un nombre s'écrit en en juxtaposant un ou plusieurs. La valeur d'un symbole n'est plus absolue, mais dépend de sa position, d'où le nom de système *avec principe de position*. Ainsi, 12 signifie (une fois dix) + (deux fois un), alors que 21 signifie (deux fois dix) + (une fois un).

Le zéro joue un rôle crucial, car il permet de spécifier les puissances de dix absentes, et ainsi de faire la distinction entre 1, 10, 100, etc.

Les systèmes avec principe de position représentent plus facilement de très grands nombres. Dans le système décimal par exemple, un milliard s'écrit 1 000 000 000, alors que dans le système égyptien, il faudrait dessiner *mille fois* le symbole du million (c'est le « plus grand » symbole disponible).

Mais l'avantage principal des systèmes avec principe de position est qu'ils se prêtent mieux au calcul. Il suffit en effet de connaître les règles d'addition et de multiplication des symboles élémentaires 0, 1, 2, ..., 9 pour pouvoir effectuer rapidement toutes les opérations fondamentales (addition, soustraction, multiplication, division) dans n'importe quel cas.

D'autres bases que 10

Un paramètre essentiel des systèmes avec principe de position est la valeur de la *base*. La base est le plus petit nombre entier qui ne s'écrit pas avec un seul symbole élémentaire. Elle vaut dix (10) dans le système décimal, mais peut être égale à n'importe quel entier plus grand ou égal à 2. C'est par exemple 2 dans le système employé dans la mémoire interne des ordinateurs.

Pour construire un système avec une base égale à deux (appelé système binaire), il faut d'abord choisir un symbole pour zéro et un. Le plus simple est de réutiliser les symboles existants « 0 » et « 1 ».

Le tableau 1.1 montre les premiers nombres entiers en base deux. Pour éviter toute ambiguïté, ils sont notés avec « (2) » en indice inférieur.

Tab. 1.1 – Écriture de quelques entiers en base 2

En base 10	En base 2	Explication
0	$\mathbf{0}_{(2)}$	$\mathbf{0} \times 1$
1	$\mathbf{1}_{(2)}$	$\mathbf{1} \times 1$
2	$\mathbf{10}_{(2)}$	$(\mathbf{1} \times 2) + (\mathbf{0} \times 1)$
3	$\mathbf{11}_{(2)}$	$(\mathbf{1} \times 2) + (\mathbf{1} \times 1)$
4	$\mathbf{100}_{(2)}$	$(\mathbf{1} \times 2 \times 2) + (\mathbf{0} \times 2) + (\mathbf{0} \times 1)$

Si la base est supérieure à dix, il faut introduire de nouveaux symboles élémentaires. Dans le système hexadécimal (base 16), les nombres de dix à quinze sont habituellement représentés par A, B, ..., F.

Ce système est utilisé en informatique pour représenter des octets (un octet = 8 bits), car il est plus lisible et plus pratique pour l'être humain que le binaire. Le système décimal donnerait bien sûr aussi des expressions lisibles, mais le système hexadécimal a l'avantage d'une conversion facile à partir du binaire. Comme $16 = 2^4$, la conversion se fait par bloc de 4 bits. L'octet 11110001 s'écrit par exemple F1 en hexadécimal, car 1111 s'écrit F et 0001 s'écrit 1.

Toutes les bonnes propriétés du système décimal, comme le nombre fini de symboles élémentaires et la facilité d'exécution des opérations fondamentales, sont valables indépendamment de la valeur de la base.

Le système babylonien

Les Babyloniens utilisaient un système avec base soixante qui remonte à environ 1900 ans av. J.-C.

Il ne comprenait cependant pas, du moins initialement, de symbole pour « 0 ». Le symbole pour 1 pouvait donc représenter n'importe quelle puissance de la base, comme 1, 60, 3 600, etc., et seul le contexte permettait de décider.

Des fractions sexagésimales (1/60, 1/3 600, etc.) étaient également employées.

Pour effectuer des multiplications, les scribes-calculateurs utilisaient des tables donnant tous les produits des nombres de un à cinquante-neuf (il est difficilement imaginable de les apprendre par cœur !).

Ce système sera ensuite adopté par les astronomes grecs de l'Antiquité tardive, comme Claude Ptolémée (né vers l'an 90) qui s'en servit pour ses calculs trigonométriques.

La base soixante a survécu dans la division de l'heure en 60 minutes, et de la minute en 60 secondes, ainsi que dans les divisions analogues du degré d'angle.

1.2.4 Les quatre opérations fondamentales

Les quatre opérations fondamentales sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. On peut les considérer comme les abstractions de diverses manipulations concrètes : regroupement d'ensembles, enlèvement d'objets, partage d'ensembles, etc. Leurs propriétés sont indépendantes des objets considérés.

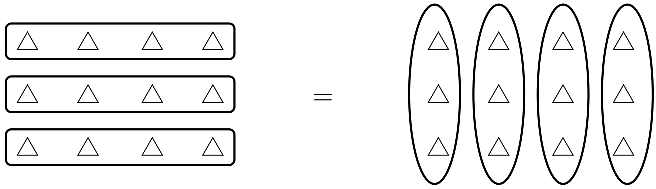
L'addition et la multiplication de nombres entiers sont toujours possibles et donnent un entier positif. Ce n'est pas toujours le cas de la soustraction (par exemple $3 - 5$) ni de la division (par exemple $3/2$).

L'addition et la multiplication ont entre autres les propriétés suivantes :

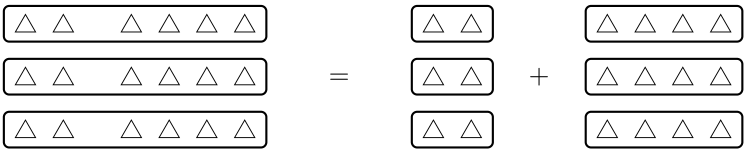
1. Commutativité de l'addition : le total des objets est le même si on ajoute un ensemble de 4 objets à un ensemble de 2 objets, ou un ensemble de 2 objets à un ensemble de 4 objets : $2 + 4 = 4 + 2$.

$$\boxed{\triangle\ \triangle} + \boxed{\triangle\ \triangle\ \triangle\ \triangle} = \boxed{\triangle\ \triangle\ \triangle\ \triangle} + \boxed{\triangle\ \triangle}$$

2. Commutativité de la multiplication : le total des objets est le même si on prend 3 ensembles de 4 objets, ou 4 ensembles de 3 objets : $3 \times 4 = 4 \times 3$.



3. Distributivité de la multiplication sur l'addition : $3 \times (2 + 4) = (3 \times 2) + (3 \times 4)$.



La commutativité de l'addition et de la multiplication sont des propriétés tellement simples que nous les utilisons tous les jours sans nous en rendre compte.

Quant à la distributivité, elle intervient dans l'algorithme usuel de multiplication, comme l'illustre l'exemple ci-contre. En effet, on y utilise le fait que 78×9, c.-à-d. $(8 + 70) \times 9$, est équivalent à $(8 \times 9) + (70 \times 9)$, c.-à-d. $72 + 630$.

$$\begin{array}{r} 78 \\ \underline{9} \\ 72 \\ \underline{63} \\ 702 \end{array}$$

Mais comment exprimer ces propriétés de manière générale, et pas seulement en faisant référence à des exemples particuliers ?

Des lettres pour représenter des nombres entiers quelconques

Quand on veut formuler des règles générales en droit, on fait référence à des noms communs, et pas à des noms propres. Ainsi, la règle est d'application à l'ensemble des personnes d'une certaine catégorie, et pas à telle ou telle personne particulière.

Nous procéderons de la même manière ici : 1, 2, 3, etc. sont analogues à des noms propres, alors que le mot « nombre » est un nom commun. Évidemment, il serait assez lourd d'écrire « nombre × nombre ». C'est pourquoi on emploie des abréviations le plus souvent constituées d'une seule lettre. Ainsi, n désignera un nombre quelconque, non spécifié, mais qui est le même tout au long des manipulations effectuées. Si le problème implique deux nombres, on utilisera deux lettres, comme n et m.

Expression générale de quelques propriétés

Les propriétés mentionnées plus haut s'expriment comme suit, avec n, m et p des entiers quelconques :

— l'addition est commutative : $n + m = m + n$;

— la multiplication est commutative : $n \times m = m \times n$;
— la multiplication est distributive sur l'addition : $n \times (m+p) = n \times m + n \times p$.
Si la soustraction est possible, on a également d'autres propriétés de
— commutativité : $n - m + p = n + p - m$;
— et de distributivité : $n \times (m - p) = n \times m - n \times p$.

Il est d'ailleurs possible de rendre ces notations encore plus compactes. On supprime d'abord le signe $\times$ entre deux lettres, ou entre un nombre et une lettre ; $n \times m$ et $2 \times n$ se simplifient donc en nm et $2n$. Les exposants simplifient l'écriture des produits de quantités identiques : $n^2 \equiv n\,n$ et $n^3 \equiv n\,n\,n$ (nous utilisons $\equiv$ comme symbole de la définition).

Supprimer le signe $\times$ dans 2×3 n'est évidemment pas possible. Le remplacer par un blanc présente trop de risques d'erreur, en particulier dans les textes manuscrits.

Représenter des nombres par des lettres facilite aussi la *preuve* de résultats généraux, comme le montre ce petit exemple.

Théorème 1.1. *Le carré de tout nombre pair est un multiple de 4, c.-à-d. le produit de 4 et d'un entier.*

Démonstration. Tout nombre pair est de la forme $2n$, où n est entier. Son carré est $(2n)(2n) = 4n^2$, qui est un multiple de 4. □

Une note historique sur la notation mathématique

Dans les textes anciens, le raisonnement mathématique est expliqué avec des phrases dans lesquelles les quantités considérées et les opérations effectuées sont désignées par leur nom.

Une notation mathématique a cependant divers avantages. Les résultats s'expriment de manière plus concise, plus lisible, et sans ambiguïté. De plus, le raisonnement qui permet de passer de l'un à l'autre peut être remplacé par des manipulations « mécaniques » qui, avec un peu d'expérience, s'effectuent plus rapidement et facilement.

Les abréviations de certains mots courants utilisées par Diophante au troisième siècle apr. J.-C. constituent un premier pas dans cette direction [10].

Mais il faudra attendre le XVIe siècle pour voir apparaître une vraie notation mathématique, avec des symboles spécifiques pour toutes les opérations (addition, multiplication, etc.) et toutes les quantités.

Différentes versions ont alors été proposées et ont coexisté jusqu'à ce que les symboles actuels s'imposent.

Ainsi, Cardan, vers le milieu du XVIe siècle, se sert de « p », « m », et « R » pour désigner l'addition, la soustraction, et la racine carrée. Ces lettres viennent des mots italiens *piu*, *meno*, et *radice*, ou des mots latins *plus*, *minus*, et *radix*.

Les notations de Descartes (dans *La géométrie*, publié en 1637) ressemblent beaucoup aux nôtres (+, −, barre de fraction, $\sqrt{\ }$ pour la racine carrée, absence de symbole explicite pour la multiplication, exposants, etc.), avec cependant quelques différences. Il indique par exemple l'égalité avec ∝ plutôt qu'avec =.

Aujourd'hui, la même notation est utilisée dans le monde entier, ce qui en fait le premier langage universel.

1.3 Les nombres rationnels

1.3.1 Pourquoi des nombres rationnels ?

L'expérience montre que la longueur, le poids, le volume, etc. ont certaines caractéristiques communes :

— ils ont une certaine permanence dans le temps ;
— ils sont préservés par des manipulations telles que le déplacement, la coupure, le collage ;
— ils peuvent être comparés et classés de façon croissante ;
— ils peuvent être partagés, au moins en principe, en autant de parts égales que l'on veut.

Les trois premières propriétés les apparentent aux groupes d'objets ou d'êtres vivants qui ont conduit à la notion d'entiers.

Mais la quatrième propriété implique qu'une notion nouvelle est nécessaire. Selon le nombre de parts, on parlera ainsi de la moitié, du tiers, du quart, etc. On peut aller un pas plus loin : par exemple, partager une tarte en trois parts égales dont on en prélève ensuite deux. On représente cette quantité (deux tiers) au moyen de la fraction $\frac{2}{3}$. Le numérateur 2 est le nombre de parts et le dénominateur 3 est relié à la taille des parts.

Des fractions différentes peuvent représenter la même quantité, comme $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$. En effet, les parts sont *deux* fois plus petites dans $\frac{4}{6}$ que dans $\frac{2}{3}$, mais il y en a *deux* fois plus. Plus généralement, il existe une infinité de fractions équivalentes de la forme $\frac{2n}{3n}$, où n est un entier non nul quelconque.

Parmi chaque infinité de fractions équivalentes, celle avec les plus petits numérateur et dénominateur est appelée fraction *irréductible*. Ainsi, $\frac{2}{3}$ est la fraction irréductible équivalente à $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, ... C'est évidemment la plus pratique.

La quantité représentée par chaque ensemble de fractions équivalentes est appelée « nombre rationnel ».

L'ensemble des nombres rationnels comprend celui des entiers positifs p, puisque $p = p/1$.

1.3.2 Addition et multiplication de nombres rationnels

Avec en tête l'analogie avec des parts de tarte, il est clair que la somme d'un tiers et d'un tiers est égale à deux tiers. Plus généralement, l'addition de deux fractions de même dénominateur [1] est définie comme suit :

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q} \equiv \frac{p+p'}{q} \tag{1.1}$$

1. On supposera toujours que les dénominateurs sont différents de 0, car partager entre 0 personne n'a pas de sens.