

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>iii</b>
Tout est nombre . . . . .	iii
Réflexions sur l'enseignement des mathématiques . . . . .	iii
L'approche du livre . . . . .	v
Le contenu du livre . . . . .	vi
<b>1 Les nombres</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	1
1.1.1 Des entiers naturels aux nombres réels . . . . .	1
1.1.2 Plan du chapitre . . . . .	1
1.2 Les nombres entiers positifs . . . . .	2
1.2.1 Premiers comptages . . . . .	2
1.2.2 Systèmes de numération sans principe de position . . . . .	2
1.2.3 Systèmes de numération avec principe de position . . . . .	4
1.2.4 Les quatre opérations fondamentales . . . . .	5
1.3 Les nombres rationnels . . . . .	8
1.3.1 Pourquoi des nombres rationnels? . . . . .	8
1.3.2 Addition et multiplication de nombres rationnels . . . . .	8
1.3.3 Diviseur d'un nombre entier . . . . .	10
1.3.4 Plus grand commun diviseur . . . . .	11
1.3.5 Plus petit commun multiple . . . . .	11
1.3.6 Nombres premiers et factorisation . . . . .	12
1.3.7 Le développement décimal des fractions . . . . .	15
1.4 Les nombres irrationnels . . . . .	17
1.4.1 Mesures de longueurs et nombres irrationnels . . . . .	17
1.4.2 Discussion . . . . .	18
1.5 Les nombres négatifs . . . . .	20
1.5.1 Pourquoi des nombres négatifs? . . . . .	20
1.5.2 Les règles de calcul pour les nombres négatifs . . . . .	22
1.5.3 Les ensembles de nombres . . . . .	24
1.6 La notation scientifique, ou comment écrire de très grands et très petits nombres . . . . .	24
1.7 Particularités des systèmes de numération . . . . .	25
1.7.1 Propriétés intrinsèques et non intrinsèques . . . . .	25

1.7.2	La base 10 est-elle la meilleure ? . . . . .	26
1.8	Perspectives . . . . .	28
1.9	Annexe . . . . .	28
1.9.1	L'algorithme d'Euclide . . . . .	28
1.9.2	Règles d'écriture des nombres dans le système romain . .	30
1.10	Exercices . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Algèbre : équations linéaires et quadratiques</b>	<b>33</b>
2.1	Introduction . . . . .	33
2.1.1	Plions une feuille A4 . . . . .	33
2.1.2	Plan du chapitre . . . . .	34
2.2	Principes fondamentaux et équations linéaires . . . . .	34
2.2.1	Qu'est-ce que l'algèbre ? . . . . .	34
2.2.2	La démarche algébrique . . . . .	38
2.2.3	Règles de priorité . . . . .	39
2.2.4	Équations linéaires quelconques . . . . .	40
2.2.5	Deux équations linéaires à deux inconnues . . . . .	42
2.2.6	Forme développée d'une expression algébrique et produits remarquables . . . . .	43
2.3	Équations quadratiques . . . . .	44
2.3.1	Le format A4 . . . . .	44
2.3.2	Problème du rectangle de périmètre et surface donnés . .	45
2.3.3	Solution de l'équation quadratique quelconque . . . . .	48
2.4	Racines carrées . . . . .	52
2.4.1	Développement décimal du quotient de deux nombres . .	53
2.4.2	Développement décimal de la racine carrée . . . . .	54
2.4.3	Méthode de Héron de calcul des racines carrées . . . . .	56
2.4.4	Propriétés . . . . .	58
2.5	D'autres notions d'algèbre . . . . .	59
2.5.1	Moyenne et moyenne pondérée . . . . .	59
2.5.2	Propriétés des puissances entières . . . . .	60
2.5.3	Inéquations à une inconnue . . . . .	60
2.5.4	Propriétés de la valeur absolue . . . . .	63
2.6	Perspectives . . . . .	63
2.7	Annexe : associativité de l'addition et de la multiplication . . . .	64
2.8	Exercices . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Premiers résultats de géométrie</b>	<b>67</b>
3.1	Introduction . . . . .	67
3.1.1	Motivation . . . . .	67
3.1.2	Plan du chapitre . . . . .	67
3.2	Surfaces des figures rectilignes . . . . .	68
3.3	Propriétés des triangles . . . . .	70
3.3.1	Somme des angles d'un triangle . . . . .	70
3.3.2	La méthode de Thalès, ou comment déterminer une hauteur sans la mesurer . . . . .	72

3.4	Le problème de la fermière, la rivière et la vache . . . . .	74
3.5	Les pavages du plan . . . . .	76
3.5.1	Angles des polygones réguliers . . . . .	77
3.5.2	Pavages du plan avec des polygones réguliers . . . . .	78
3.6	Le théorème de Pythagore . . . . .	81
3.6.1	Un cas particulier . . . . .	81
3.6.2	Le cas général . . . . .	82
3.6.3	Le théorème de Pythagore dans les mathématiques babyloniennes . . . . .	83
3.7	Périmètre et surface du cercle . . . . .	85
3.8	Perspectives . . . . .	87
3.9	Exercices . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Géométrie euclidienne : les quatre premiers postulats</b>	<b>89</b>
4.1	Introduction . . . . .	89
4.1.1	Motivation . . . . .	89
4.1.2	Plan du chapitre . . . . .	90
4.2	Le début des <i>Éléments</i> . . . . .	90
4.2.1	Définitions . . . . .	90
4.2.2	Axiomes . . . . .	92
4.2.3	Les premières propositions . . . . .	93
4.3	Commentaires et critiques . . . . .	94
4.3.1	Définitions . . . . .	94
4.3.2	Axiomes et propositions . . . . .	94
4.3.3	Propriétés d'invariance du plan euclidien . . . . .	96
4.3.4	La sphère . . . . .	98
4.4	Théorèmes de congruence et applications . . . . .	101
4.4.1	Des théorèmes de congruence des triangles . . . . .	102
4.4.2	Constructions géométriques . . . . .	105
4.4.3	Médiatrices d'un triangle . . . . .	108
4.5	Inégalités et applications . . . . .	109
4.5.1	Égalités et inégalités entre angles . . . . .	109
4.5.2	Distance minimale entre deux points . . . . .	111
4.5.3	Distance minimale entre un point et une droite . . . . .	111
4.5.4	Tangentes à un cercle . . . . .	112
4.5.5	D'autres théorèmes de congruence des triangles . . . . .	112
4.5.6	Bissectrices d'un triangle . . . . .	114
4.5.7	Hauteurs d'un triangle . . . . .	115
4.6	Perspectives . . . . .	116
4.7	Annexe . . . . .	116
4.7.1	Démonstration du théorème des hauteurs . . . . .	116
4.7.2	Médianes d'un triangle . . . . .	119
4.8	Exercices . . . . .	119

<b>5</b>	<b>Géométrie euclidienne : le cinquième postulat</b>	<b>121</b>
5.1	Introduction . . . . .	121
5.1.1	Motivation . . . . .	121
5.1.2	Plan du chapitre . . . . .	121
5.2	Les parallèles et le cinquième postulat d'Euclide . . . . .	122
5.2.1	Existence de droites parallèles . . . . .	122
5.2.2	Cinquième postulat . . . . .	123
5.2.3	Théorème des angles alternes-internes . . . . .	123
5.2.4	Unicité de la parallèle menée par un point extérieur . . . . .	124
5.3	Angles des figures géométriques . . . . .	125
5.3.1	Somme des angles d'un triangle . . . . .	125
5.3.2	Les quadrilatères . . . . .	126
5.3.3	Angles dans un cercle . . . . .	127
5.4	Surfaces et applications . . . . .	128
5.4.1	Surface du triangle . . . . .	128
5.4.2	Rayon du cercle inscrit dans un triangle . . . . .	129
5.4.3	Théorème de Pythagore . . . . .	130
5.5	Triangles semblables et théorème de Thalès . . . . .	132
5.5.1	Figures semblables . . . . .	132
5.5.2	Théorème de Thalès . . . . .	133
5.5.3	Théorèmes de similitude . . . . .	135
5.6	Applications . . . . .	137
5.6.1	Rayon du cercle circonscrit à un triangle . . . . .	137
5.6.2	Médianes d'un triangle . . . . .	138
5.6.3	Hauteurs d'un triangle . . . . .	140
5.6.4	Quel est le meilleur endroit pour transformer un essai au rugby? . . . . .	141
5.7	Parallélisme et géométries non euclidiennes . . . . .	143
5.8	Perspectives . . . . .	145
5.9	Exercices . . . . .	145
<b>6</b>	<b>Géométrie analytique</b>	<b>147</b>
6.1	Introduction . . . . .	147
6.1.1	Motivation . . . . .	147
6.1.2	Plan du chapitre . . . . .	147
6.2	Résultats fondamentaux . . . . .	148
6.2.1	Coordonnées cartésiennes d'un point . . . . .	148
6.2.2	Distance entre deux points . . . . .	149
6.2.3	Milieu d'un segment . . . . .	150
6.2.4	Équation de la droite passant par deux points donnés . . . . .	151
6.2.5	La forme standardisée de l'équation d'une droite . . . . .	155
6.2.6	Droite parallèle à une droite, et passant par un point . . . . .	156
6.2.7	Droites perpendiculaires à une droite . . . . .	156
6.2.8	Intersection de deux droites . . . . .	157
6.2.9	Distance entre un point et une droite . . . . .	159
6.2.10	Demi-droites . . . . .	160

6.2.11	Bissectrices . . . . .	160
6.2.12	Équation du cercle . . . . .	162
6.3	Les droites remarquables d'un triangle . . . . .	163
6.3.1	Utilisation des propriétés d'invariance de la géométrie du plan . . . . .	163
6.3.2	Intersection des trois médianes . . . . .	164
6.3.3	Intersection des trois bissectrices . . . . .	165
6.3.4	Comparaison des méthodes . . . . .	166
6.4	Surfaces du triangle et du parallélogramme en fonction des positions des sommets . . . . .	167
6.4.1	Surface du triangle . . . . .	167
6.4.2	Surface du parallélogramme . . . . .	169
6.5	Le cercle . . . . .	170
6.5.1	Tangentes au cercle . . . . .	170
6.5.2	Surface du cercle et approximations de $\pi$ . . . . .	171
6.5.3	Périmètre du cercle . . . . .	176
6.6	Axiomatique de la géométrie . . . . .	177
6.7	Perspectives . . . . .	179
6.8	Exercices . . . . .	180
<b>7</b>	<b>Fonctions d'une variable</b> . . . . .	<b>181</b>
7.1	Introduction . . . . .	181
7.1.1	Motivation . . . . .	181
7.1.2	Plan du chapitre . . . . .	181
7.2	Concepts fondamentaux et fonctions simples . . . . .	182
7.2.1	Définition et représentation graphique . . . . .	182
7.2.2	Fonctions linéaires . . . . .	184
7.2.3	Fonctions puissances entières . . . . .	186
7.2.4	Fonctions racines . . . . .	189
7.2.5	Racines et puissances fractionnaires . . . . .	190
7.2.6	Fonctions quadratiques . . . . .	193
7.2.7	Fonctions polynomiales . . . . .	198
7.2.8	Fonctions rationnelles . . . . .	199
7.2.9	Fonctions signe et valeur absolue . . . . .	200
7.3	Propriétés générales des fonctions . . . . .	200
7.3.1	Quelques critères de classification . . . . .	200
7.3.2	Domaine d'une fonction . . . . .	204
7.3.3	Somme, produit et quotient de fonctions . . . . .	205
7.3.4	Remarques sur la notion de fonction . . . . .	206
7.4	Interpolation et approximation . . . . .	208
7.4.1	Interpolation linéaire . . . . .	209
7.4.2	Interpolation quadratique . . . . .	210
7.4.3	Remarques sur les méthodes d'interpolation . . . . .	212
7.5	Perspectives . . . . .	213
7.6	Exercices . . . . .	213

<b>8</b>	<b>Techniques algébriques</b>	<b>215</b>
8.1	Introduction . . . . .	215
8.1.1	Surface d'un triangle en termes de ses côtés . . . . .	215
8.1.2	Plan du chapitre . . . . .	215
8.2	Résolution d'équations . . . . .	216
8.2.1	Équations qu'on peut transformer en équations linéaires . . . . .	216
8.2.2	Surface d'un triangle en fonction de ses côtés . . . . .	218
8.2.3	Vérification de calculs algébriques . . . . .	220
8.2.4	Équations impliquant des racines carrées . . . . .	222
8.2.5	Technique de changement d'inconnue . . . . .	223
8.3	Comptages . . . . .	225
8.3.1	Somme des $N$ premiers entiers . . . . .	226
8.3.2	Somme des carrés des $N$ premiers entiers . . . . .	228
8.3.3	Suites arithmétiques et polynomiales . . . . .	229
8.4	Systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues . . . . .	229
8.5	La factorisation . . . . .	231
8.5.1	À quoi sert la factorisation ? . . . . .	231
8.5.2	Méthodes de factorisation . . . . .	234
8.6	Divers . . . . .	238
8.6.1	Conventions d'écriture . . . . .	238
8.6.2	Calcul numérique des valeurs d'un polynôme . . . . .	239
8.6.3	Programmation . . . . .	239
8.6.4	Comment éliminer les racines au dénominateur ? . . . . .	241
8.6.5	Inéquations avec valeur absolue . . . . .	241
8.7	Perspectives . . . . .	242
8.8	Exercices . . . . .	242
<b>9</b>	<b>Méthodes numériques de résolution des équations</b>	<b>245</b>
9.1	Introduction . . . . .	245
9.1.1	Motivation . . . . .	245
9.1.2	Plan du chapitre . . . . .	245
9.2	Valeurs approximatives des solutions . . . . .	246
9.2.1	Les racines $\sqrt[n]{a}$ . . . . .	246
9.2.2	Les fonctions polynômes . . . . .	246
9.2.3	Les fonctions quelconques . . . . .	250
9.3	Méthode de bisection de l'intervalle . . . . .	250
9.4	Méthode de la sécante . . . . .	254
9.4.1	Propriétés générales de la méthode . . . . .	254
9.4.2	Le cas particulier de la racine carrée . . . . .	257
9.4.3	Le cas des racines d'ordre supérieur à deux . . . . .	260
9.4.4	Bilan . . . . .	263
9.5	Méthodes analytiques ou numériques ? . . . . .	263
9.6	Perspectives . . . . .	264
9.7	Exercices . . . . .	264

<b>10 Fonctions exponentielles et logarithmes</b>	<b>267</b>
10.1 Introduction . . . . .	267
10.1.1 Motivation . . . . .	267
10.1.2 Plan du chapitre . . . . .	267
10.2 Les fonctions exponentielles . . . . .	268
10.2.1 Remboursement d'un emprunt après un nombre entier d'années . . . . .	268
10.2.2 Remboursement d'un emprunt après un nombre non entier d'années . . . . .	270
10.2.3 D'autres situations décrites par les mêmes formules . . . . .	271
10.2.4 Les fonctions exponentielles . . . . .	272
10.2.5 Invariance sous translation . . . . .	273
10.2.6 Comparaison des fonctions exponentielles et puissances lorsque $x$ est grand . . . . .	275
10.3 Les fonctions logarithmes . . . . .	276
10.3.1 Datation d'objets par la méthode du carbone 14 . . . . .	276
10.3.2 La notion de fonction inverse . . . . .	278
10.3.3 Fonctions inverses des fonctions exponentielles . . . . .	281
10.3.4 Les logarithmes décimaux . . . . .	284
10.3.5 Changement de base . . . . .	287
10.3.6 Comparaison des fonctions logarithmes et puissances lorsque $x$ est grand . . . . .	288
10.4 Suites et séries géométriques . . . . .	289
10.4.1 Suites géométriques . . . . .	289
10.4.2 Séries géométriques . . . . .	289
10.4.3 Remboursement d'un emprunt en plusieurs paiements . . . . .	290
10.5 Perspectives . . . . .	293
10.6 Annexe . . . . .	293
10.6.1 Moyenne géométrique . . . . .	293
10.6.2 Fabriquer une table de logarithmes . . . . .	294
10.7 Exercices . . . . .	295
<b>11 Trigonométrie</b>	<b>297</b>
11.1 Introduction . . . . .	297
11.1.1 Comment déterminer une longueur sans la mesurer ? . . . . .	297
11.1.2 Plan du chapitre . . . . .	298
11.2 Triangles rectangles et fonctions trigonométriques . . . . .	298
11.2.1 Fonctions trigonométriques d'un angle aigu . . . . .	298
11.2.2 Propriétés élémentaires des fonctions trigonométriques . . . . .	300
11.3 Relations d'addition et conséquences . . . . .	302
11.3.1 Relations d'addition . . . . .	303
11.3.2 Conséquences des relations d'addition . . . . .	305
11.3.3 Autres conséquences des relations d'addition . . . . .	308
11.3.4 Remarques . . . . .	309
11.3.5 Solution du problème du géomètre . . . . .	311
11.4 Résolution des triangles quelconques . . . . .	312

11.4.1	Un côté et deux angles sont connus . . . . .	312
11.4.2	Deux côtés et l'angle qui les sépare sont connus . . . . .	315
11.4.3	Deux côtés et un angle opposé sont connus . . . . .	318
11.4.4	Trois côtés sont connus . . . . .	318
11.4.5	Trois angles sont connus . . . . .	319
11.5	Approximation de $\pi$ . . . . .	319
11.5.1	Des bornes sur $\pi$ . . . . .	319
11.5.2	Le calcul d'Archimède . . . . .	322
11.6	Perspectives . . . . .	324
11.7	Exercices . . . . .	325
<b>12</b>	<b>Fonctions trigonométriques et phénomènes périodiques</b>	<b>327</b>
12.1	Introduction . . . . .	327
12.1.1	Le diapason . . . . .	327
12.1.2	Plan du chapitre . . . . .	327
12.2	Points sur un cercle . . . . .	328
12.2.1	Notion de coordonnée angulaire . . . . .	328
12.2.2	Fonctions trigonométriques d'une coordonnée angulaire . . . . .	329
12.3	Points en rotation sur un cercle . . . . .	331
12.3.1	Coordonnée angulaire d'un point en rotation . . . . .	331
12.3.2	Les coordonnées cartésiennes en fonction du temps . . . . .	332
12.3.3	Fonctions trigonométriques définies pour tous les réels . . . . .	332
12.4	Application : les ondes sonores et le diapason . . . . .	334
12.4.1	Rareté des fonctions périodiques et douces . . . . .	334
12.4.2	Formulation mathématique des ondes sonores . . . . .	335
12.4.3	Superposition de deux ondes de même fréquence . . . . .	336
12.4.4	Superposition de deux ondes de fréquences légèrement différentes . . . . .	337
12.4.5	Formules trigonométriques . . . . .	339
12.5	Fonctions trigonométriques inverses . . . . .	340
12.5.1	Équations trigonométriques . . . . .	340
12.5.2	Définition des fonctions trigonométriques inverses . . . . .	340
12.5.3	Solutions des équations trigonométriques en termes de fonctions trigonométriques inverses . . . . .	342
12.6	Le radian . . . . .	344
12.7	Perspectives . . . . .	345
12.8	Annexe . . . . .	346
12.8.1	Liens entre fonctions trigonométriques . . . . .	346
12.8.2	Les fonctions sécante, cosécante et cotangente . . . . .	347
12.9	Exercices . . . . .	348
<b>13</b>	<b>Coniques</b>	<b>351</b>
13.1	Introduction . . . . .	351
13.1.1	Des courbes remarquables . . . . .	351
13.1.2	Plan du chapitre . . . . .	351
13.2	Définition des coniques . . . . .	352



13.2.1	Définition des ellipses par les distances aux foyers . . . . .	352
13.2.2	Définition des hyperboles par les distances aux foyers . . . . .	355
13.2.3	Définition des ellipses, hyperboles et paraboles par un foyer et une directrice . . . . .	357
13.2.4	Définition des coniques comme intersections d'un cône par un plan . . . . .	363
13.3	Propriétés des foyers des coniques . . . . .	364
13.3.1	Tangentes à une conique . . . . .	365
13.3.2	Source lumineuse et foyers de l'ellipse . . . . .	368
13.3.3	Source lumineuse et foyer de la parabole . . . . .	369
13.3.4	Source lumineuse et foyers de l'hyperbole . . . . .	370
13.4	Coniques et équations quadratiques . . . . .	371
13.4.1	Équation des coniques en position quelconque . . . . .	371
13.4.2	Courbes correspondant aux équations quadratiques . . . . .	372
13.4.3	Coniques passant par cinq points donnés . . . . .	377
13.5	Perspectives . . . . .	378
13.6	Annexe : équations des tangentes aux coniques . . . . .	379
13.7	Exercices . . . . .	380
<b>14</b>	<b>Résolution des systèmes d'équations linéaires par élimination gaussienne</b>	<b>383</b>
14.1	Introduction . . . . .	383
14.1.1	Ellipse passant par cinq points donnés . . . . .	383
14.1.2	Qu'est-ce qu'un algorithme ? . . . . .	384
14.1.3	Plan du chapitre . . . . .	385
14.2	Systèmes de deux équations à deux inconnues . . . . .	385
14.2.1	Interprétation géométrique . . . . .	386
14.2.2	Résolution algébrique . . . . .	386
14.2.3	Une notation plus compacte . . . . .	388
14.3	Systèmes de trois équations à trois inconnues . . . . .	390
14.3.1	Interprétation géométrique . . . . .	390
14.3.2	Résolution algébrique . . . . .	390
14.4	Systèmes de $n$ équations à $n$ inconnues . . . . .	393
14.4.1	Interprétation géométrique . . . . .	393
14.4.2	Résolution algébrique des systèmes réguliers . . . . .	394
14.4.3	Résolution algébrique des systèmes singuliers . . . . .	398
14.5	Systèmes de $p$ équations à $n$ inconnues . . . . .	404
14.6	Perspectives . . . . .	404
14.7	Annexe : temps de calcul de l'algorithme gaussien . . . . .	405
14.8	Exercices . . . . .	406
<b>A</b>	<b>Pavages archimédiens</b>	<b>409</b>
A.1	Le problème . . . . .	409
A.2	La solution . . . . .	409
A.2.1	Combinaisons de polygones réguliers autour d'un sommet . . . . .	409
A.2.2	Juxtapositions de polygones autour d'un sommet . . . . .	412

A.2.3 Pavages s'étendant au plan tout entier . . . . .	413
A.3 Exercices . . . . .	418
<b>B Remarques sur la nature des mathématiques</b>	<b>419</b>
B.1 Langage et mode de pensée mathématiques . . . . .	419
B.2 Que signifie le signe = en mathématiques? . . . . .	422
<b>C Centre de gravité</b>	<b>423</b>
C.1 Centre de gravité de masses ponctuelles . . . . .	423
C.2 Centre de gravité de figures planes continues . . . . .	426
<b>D Changements de variables et troisième loi de Kepler</b>	<b>431</b>
D.1 Introduction . . . . .	431
D.2 Changement de variable logarithmique . . . . .	431
D.2.1 Les lois de Kepler . . . . .	431
D.2.2 Le graphique log/log et la troisième loi de Kepler . . . . .	432
D.2.3 Les graphiques log/lin et lin/log . . . . .	435
D.3 Perspectives . . . . .	436
D.4 Exercices . . . . .	436
<b>E Solutions des exercices</b>	<b>439</b>
E.1 Les nombres . . . . .	439
E.2 Algèbre : équations linéaires et quadratiques . . . . .	442
E.3 Premiers résultats de géométrie . . . . .	445
E.4 Géométrie euclidienne : les quatre premiers postulats . . . . .	447
E.5 Géométrie euclidienne : le cinquième postulat . . . . .	448
E.6 Géométrie analytique . . . . .	452
E.7 Fonctions d'une variable . . . . .	457
E.8 Techniques algébriques . . . . .	460
E.9 Méthodes numériques de résolution des équations . . . . .	468
E.10 Fonctions exponentielles et logarithmes . . . . .	472
E.11 Trigonométrie . . . . .	477
E.12 Fonctions trigonométriques et phénomènes périodiques . . . . .	481
E.13 Coniques . . . . .	484
E.14 Résolution des systèmes d'équations linéaires par élimination gaussienne . . . . .	492
E.15 Pavages archimédiens . . . . .	496
E.16 Changements de variables et troisième loi de Kepler . . . . .	498
<b>Bibliographie</b>	<b>499</b>
<b>Index</b>	<b>501</b>