Chapitre I

Notions de base

1 Formulaire

1.1 Rappels sur l'emploi des complexes

Soit $\overline{Z} = r + jx = |\overline{Z}|e^{j\varphi}$. Ici, r et x sont les parties réelles et imaginaires de l'impédance.
On a $\left|\overline{Z}\right| = \sqrt{r^2 + x^2}$ et $\varphi = \arctan\dfrac{x}{r}$ si $r > 0$ et $\varphi = \arctan\dfrac{x}{r} + \pi$ si $r < 0$.

Dans la suite de cet ouvrage, les amplitudes réelles et complexes des différentes grandeurs seront représentées par des majuscules (V par exemple pour la tension). Les minuscules seront utilisées pour les valeurs (réelles et complexes) dépendant du temps (par exemple v).

1.2 Puissance moyenne

Si $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$ et $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. La pulsation est $\omega = 2\pi f$, avec f la fréquence.
On a $P = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T v(t)i(t)dt = \dfrac{V_0 I_0 \cos(\varphi)}{2}$.
En complexe : $P = \dfrac{1}{2}\Re\left[\overline{V}^*\,\overline{I}\right] = \dfrac{1}{2}\Re\left[\overline{V}\,\overline{I}^*\right] = \dfrac{1}{4}\Re\left[\overline{V}^*\,\overline{I} + \overline{V}\,\overline{I}^*\right]$.
Ici $\Re$ indique la partie réelle et le facteur 2 dans le calcul de la puissance moyenne vient du fait que l'on a utilisé les amplitudes (valeurs crêtes) et non pas les valeurs efficaces (on rappelle que : $V_{\text{eff}} = V_{\text{max}}/\sqrt{2}$).

1.3 Décibels (dB)

Le gain en puissance peut s'exprimer en dB : $G(\text{dB}) = 10\log\dfrac{P_s}{P_e}$ où P_s est la puissance à la sortie et P_e la puissance à l'entrée. L'atténuation en puissance peut s'exprimer en dB : $A(\text{dB}) = 10\log\dfrac{P_e}{P_s} = -G(\text{dB})$.

Le gain en tension peut s'exprimer en dB : $G'(\text{dB}) = 20\log\dfrac{V_s}{V_e}$ où V_s est la tension à la sortie et V_e la tension à l'entrée. ($G = G'$ si les impédances sont identiques). L'atténuation en tension peut s'exprimer en dB : $A'(\text{dB}) = 20\log\dfrac{V_e}{V_s} = -G'(\text{dB})$.

Une puissance peut s'exprimer en dBm : $P(\text{dBm}) = 10\log\dfrac{P}{1\ \text{mW}} = 10\log(P(\text{mW}))$.

Une tension peut s'exprimer en dBmV : $V(\text{dBmV}) = 20\log\dfrac{V}{1\ \text{mV}} = 20\log(V(\text{mV}))$.

Dans ces relations, log représente le logarithme en base 10.

On a donc : $P_s = P_e \times 10^{G(\text{dB})/10}$; $V_s = V_e \times 10^{G'(\text{dB})/20}$ et $P(\text{mW}) = 10^{P(\text{dBm})/10}$.

Les dBm (dBmV) s'ajoutent avec les dB et pas avec les dBm (dBmV). On a donc : $P_s(\text{dBm}) = P_e(\text{dBm}) + G(\text{dB})$, et $V_s(\text{dBmV}) = V_e(\text{dBmV}) + G'(\text{dB})$

2 Exercices

Exercice I.1 : Calcul de dérivées partielles

Soit $f = e^{j\omega t - \overline{\gamma}\mathfrak{z}}$. Dans cette expression $\overline{\gamma} = \alpha + j\beta$, où γ est la constante de propagation, α est la constante d'affaiblissement et β est la constante de phase. Calculer :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial t}$;
2. $\dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$.

Solution I.1

On a

1. $\dfrac{\partial e^{j\omega t-\overline{\gamma}\mathfrak{z}}}{\partial t} = \dfrac{\partial e^{j\omega t-\alpha\mathfrak{z}-j\beta\mathfrak{z}}}{\partial t} = j\omega f$
2. $\dfrac{\partial e^{j\omega t-\overline{\gamma}\mathfrak{z}}}{\partial \mathfrak{z}} = \dfrac{\partial e^{j\omega t-\alpha\mathfrak{z}-j\beta\mathfrak{z}}}{\partial \mathfrak{z}} = -(\alpha+j\beta)f$

Exercice I.2 : Parties réelles et imaginaires d'exponentielles complexes

Donner les parties réelles et imaginaires de $e^{j\pi/4}$, $e^{j\pi/3}$, $e^{j\pi/2}$ et $e^{-j\pi/2}$.

Solution I.2

$\Re\left[e^{j\pi/4}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$, $\Im\left[e^{j\pi/4}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$
$\Re\left[e^{j\pi/3}\right] = 0{,}5$, $\Im\left[e^{j\pi/3}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$
$\Re\left[e^{j\pi/2}\right] = 0$, $\Im\left[e^{j\pi/2}\right] = 1$
$\Re\left[e^{-j\pi/2}\right] = 0$, $\Im\left[e^{-j\pi/2}\right] = -1$.

Exercice I.3 : Tension complexe

Soit la tension sinusoïdale $v(t)$; donner la tension complexe $\overline{v(t)}$ et l'amplitude complexe $\overline{V}$

1. $v(t) = 2\cos(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = 1000$ rad/s et $\varphi = 45°$,
2. $v(t) = 2\cos(\omega t + \varphi)$ sachant que la période $T = 1$ s et $\varphi = \pi/3$,
3. $v(t) = 5\sin(\omega t + \pi/3)$ sachant que la fréquence est 10^9 Hz.

Solution I.3

1. $\overline{v}(t) = 2e^{j\pi/4}e^{j1000t}$, et $\overline{V} = 2e^{j\pi/4}$
2. On calcule d'abord $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$, d'où $\overline{v}(t) = 2e^{j\pi/3}e^{j2\pi t}$, et $\overline{V} = 2e^{j\pi/3}$,
3. $v(t) = 5\sin(\omega t + \pi/3) = 5\sin(\omega t + \pi/2 - \pi/6)$, sachant que $\sin(\theta + \pi/2) = \cos(\theta)$, on a alors $v(t) = 5\cos(\omega t - \pi/6)$.
   Avec $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^9$ rad/s.
   Donc, $\overline{v}(t) = 5e^{-j\pi/6}e^{j2\pi\cdot 10^9 t}$, et $\overline{V} = 5e^{-j\pi/6}$.

Exercice I.4 : Puissance moyenne et impédance complexe

1. Déterminer la puissance moyenne lorsque l'on a : $\overline{V} = a + jb$ et $\overline{I} = c + jd$. Calculer la valeur de la puissance dans les cas où :
   (a) $a = b = c = d = 1$
   (b) $a = 1, b = -1, c = d = 1$
   (c) $a = -1, b = c = d = 1$.
2. Calculer l'impédance $\overline{Z}$ dans chacun de ces trois cas ; indiquer ce qu'elle représente.

Solution I.4

1. La puissance moyenne se calcule de la façon suivante :
   $P = \frac{1}{2}\Re\left[\overline{V}^*\overline{I}\right] = \frac{1}{2}\Re\left[(a - jb)(c + jd)\right] = \frac{ac + bd}{2}$
   (a) $P = 1$ W,
   (b) $P = 0$ W,
   (c) $P = 0$ W.

2. L'impédance se calcule de la façon suivante :
$\overline{Z} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{a+jb}{c+jd}$.
   (a) $\overline{Z} = \frac{1+j}{1+j} = 1\ \Omega$.
   Dans ce cas l'impédance est purement réelle, elle représente une résistance et $P = 1$ W est la puissance dissipée.
   (b) $\overline{Z} = \frac{1-j}{1+j} = \frac{(1-j)(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \frac{1-2j+j^2}{1-j^2} = \frac{1-2j-1}{1+1} = \frac{-2j}{2} = -j$.
   Dans ce cas l'impédance est purement imaginaire négative, elle représente une capacité et la puissance est $P = 0$ W.
   (c) $\overline{Z} = \frac{-1+j}{1+j} = \frac{(-1+j)(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \frac{-1+2j-j^2}{1-j^2} = \frac{-1+2j+1}{1+1} = \frac{2j}{2} = j$.
   Dans ce cas l'impédance est purement imaginaire positive, elle représente une inductance et la puissance est $P = 0$ W.

Exercice I.5 : Puissance en sortie d'un atténuateur

Une puissance de 1 W est envoyée dans un atténuateur 12 dB. Quelle est la puissance en sortie ?

Solution I.5

Sachant que l'atténuation en dB est donnée par la relation

$$a(\text{dB}) = 10 \log \frac{P_e}{P_s}$$

on peut exprimer la puissance en sortie comme

$$P_s = \frac{P_e}{10^{a/10}} = \frac{1}{10^{12/10}} = 0{,}0631 \text{ W} = 63{,}1 \text{ mW}.$$

Exercice I.6 : Conversion en watt d'une puissance exprimée en dBm

On a mesuré une puissance de 13 dBm. Quelle est la puissance correspondante en W ?

Solution I.6

Une puissance exprimée en dBm est définie par la relation

$$P(\text{dBm}) = 10 \log \frac{P(\text{W})}{1 \text{ mW}} = 10 \log P(\text{mW})$$

d'où

$$P(\text{mW}) = 10^{\frac{P(\text{dBm})}{10}} = 10^{\frac{13}{10}} = 10^{1,3} = 20 \text{ mW} = 0{,}02 \text{ W}.$$

Exercice I.7 : Puissance en sortie d'un câble coaxial

L'atténuation du câble RG213U est de 19 dB/100 m à 1,5 GHz. Sachant que la puissance à l'entrée est $P_e = 1$ W, calculer la puissance à la sortie P_s pour un câble de longueur égale à 10 m.

Solution I.7

L'atténuation du câble est :

$$19\ \frac{\text{dB}}{100\text{m}} = 1{,}9\ \frac{\text{dB}}{10\text{m}}$$

d'où

$$a = 10 \log \frac{P_e}{P_s} \Longrightarrow \frac{P_e}{P_s} = 10^{a/10} \Longrightarrow P_s = \frac{P_e}{10^{a/10}}.$$

En remplaçant par les valeurs numériques on a :

$$P_s = \frac{1}{10^{1{,}9/10}} = 0{,}646\ \text{W}.$$

Exercice I.8 : Détermination du gain d'un amplificateur

Calculer le gain (en dB) d'un amplificateur sachant que la puissance à l'entrée est $P_e = 100$ mW et que la puissance à sa sortie est $P_s = 3{,}2$ W.

Solution I.8

$G = 10 \log \dfrac{Ps}{Pe} = 10 \log \dfrac{3{,}2}{0{,}1} = 10 \log 32 = 15{,}05$ dB.

Exercice I.9 : Détermination du gain d'une chaîne d'amplificateurs

Soit un circuit amplificateur comportant 3 étages. Chaque étage multiplie la puissance par 4. Quel est le gain total du circuit en dB ?

Solution I.9

1. Première méthode : chaque étage multipliant par 4 la puissance, le gain total est de $4^3 = 64$. Soit en dB : $G_T = 10 \log 64 = 18{,}06$ dB.
2. Deuxième méthode : un étage a un gain de $G = 10 \log 4 = 6{,}02$ dB. Sachant que l'amplificateur a 3 étages, le gain total $G_T = 3 \cdot 6{,}02 = 18{,}06$ dB.

Exercice I.10 : Conversion en dBm d'une puissance exprimée en mW

Si la puissance mesurée sur une ligne de transmission est de 0,05 mW, quelle est la puissance exprimée en dBm ?

Solution I.10

$P(\text{dBm}) = 10 \log 0{,}05 = -13{,}01$ dBm.

Exercice I.11 : Gain en tension d'un amplificateur

La tension d'entrée d'un amplificateur est de 25 mV et celle de sortie est de 150 mV. Quel est est le gain de cet amplificateur en dB ?

Solution I.11

$G = 20 \log \frac{150}{25} = 20 \log 6 = 15{,}56 \ \text{ dB}.$

Exercice I.12 : Conversion en dBmV d'une tension exprimée en Volt

Quelle est la valeur de la tension en dBmV lorsque la tension a pour valeur 2,5 V ?

Solution I.12

La tension en dBmV se calcule de la façon suivante :
$V(\text{dBmV}) = 20 \log(V(\text{mV}))$, soit ici $V(\text{dBmV}) = 20 \log(2{,}5 \cdot 10^3) = 67{,}96$ dBmV.

Exercice I.13 : Calcul de puissance en dBm et en watt

La puissance fournie à l'entrée d'un amplificateur de gain 22 dB est $P_e = -5$ dBm. Calculer la puissance en dBm à la sortie de l'amplificateur et les puissances en watt à l'entrée et à la sortie de l'amplificateur.

Solution I.13

$P_s(\text{dBm}) = G(\text{dB}) + P_e(\text{dBm}) = 22 - 5 = 17$ dBm
$P(\text{W}) = 10^{\frac{P(\text{dBm})}{10}} \cdot 10^{-3}$, d'où

$$P_e(\text{W}) = 10^{\frac{-5}{10}} \cdot 10^{-3} = 0{,}32 \cdot 10^{-3} \text{ W} = 0{,}32 \text{ mW}$$

et

$$P_s(W) = 10^{\frac{17}{10}} \cdot 10^{-3} = 50{,}12 \cdot 10^{-3} \text{ W} = 50{,}12 \text{ mW}.$$

Chapitre II

Propriétés des ondes électromagnétiques

1 Formulaire

1.1 Caractéristique d'une onde électromagnétique

Les micro-ondes sont des ondes électromagnétiques (EM) de longueurs d'ondes (dans le vide ou l'air) 1 mm $< \lambda <$ 1 m, de fréquences 300 MHz $< f <$ 300 GHz, et de périodes 3 ps $< T <$ 3 ns.

Une onde électromagnétique est composée d'un champ électrique E et d'un champ magnétique H perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à la direction de propagation de l'énergie.

Les composants et systèmes électroniques conventionnels ne fonctionnent pas correctement en micro-ondes, en particulier à cause de leur taille qui est de l'ordre des longueurs d'ondes utilisées.

Une onde EM se propage (vide et air) en ligne droite à la vitesse de la lumière ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s).

Dans un diélectrique, la vitesse de l'onde EM est plus faible $v = c/\sqrt{\varepsilon_r}$ que dans l'air ou le vide, avec ε_r, la constante diélectrique du matériau.

La longueur d'onde $\lambda = v/f$ dépend du diélectrique, elle représente la distance parcourue (à la vitesse v) pendant une période T.

La période $T = 1/f$.

Pour créer un champ électrique et un champ magnétique il faut fournir de l'énergie, cette énergie peut être transmise à distance sous la forme d'une onde EM, puis captée par une antenne.

La puissance reçue par une antenne varie comme l'inverse du carré de sa distance à l'émetteur.

Le signal peut aussi être transmis en utilisant un câble, une ligne ou un guide. Dans ce cas, la puissance reçue va dépendre de la puissance émise, des pertes en ligne et de la puissance réfléchie si l'on n'a pas adaptation d'impédances.

Sur une ligne ainsi que dans l'air et dans le vide, la présence d'ondes incidentes et réfléchies va créer des ondes stationnaires.

1.2 Champs électriques et magnétiques. Energie et puissance d'une onde électromagnétique

L'impédance du vide (air) est $Z = \dfrac{E}{H} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi = 377\ \Omega$, avec μ_0 et ε_0 respectivement la perméabilité et la permittivité du vide.

La densité d'énergie (énergie par unité de volume) en un point de l'espace où règne un champ H est : $dW = \mu H^2/2$.

La densité d'énergie (énergie par unité de volume) en un point de l'espace où règne un champ E est : $dW = \varepsilon E^2/2$.

La densité de puissance (puissance par unité de surface) est $dP = EH$.

Les énergies transportées par les deux champs sont égales pour une onde EM.

La densité d'énergie (énergie par unité de volume) en un point de l'espace où l'on a une onde EM est : $dW = \dfrac{\mu H^2}{2} + \dfrac{\varepsilon E^2}{2} = \mu H^2 = \varepsilon E^2$.

Ces relations sont valables en régime continu (ou instantané). E et H représentent des amplitudes.

En régime sinusoïdal, si E et H sont des amplitudes, on aura en moyenne $dW = \dfrac{\varepsilon E^2}{2}$ ou $dW = \varepsilon E_{\text{eff}}^2$ avec E_{eff}, la valeur efficace du champ E et $dW = \dfrac{\mu H^2}{2}$ ou $dW = \mu H_{\text{eff}}^2$ avec H_{eff}, la valeur efficace du champ H et $dP = \dfrac{EH}{2} = E_{\text{eff}} H_{\text{eff}}$

L'induction magnétique B est reliée au champ magnétique H par $B = \mu H$.

Les densités d'énergie sont faibles mais la puissance peut être grande, car la vitesse de propagation v est grande.

La puissance transportée par une onde EM à travers une surface S est :
$P = SdP = W/t = VdW$ (avec le volume $V = vS$).