Logique et raisonnement 1

Compétences

On cherchera à :

- ▷ Savoir montrer un résultat en raisonnant par équivalences successives

  Exercices 1 à 3
- ▷ Savoir montrer que deux assertions sont équivalentes

  Exercices 4 à 7
- ▷ Savoir montrer un résultat en raisonnant par l'absurde

  Exercices 9 à 19
- ▷ Savoir montrer une propriété dépendant d'un entier en raisonnant par récurrence simple

  Exercices 20 à 21
- ▷ Savoir montrer une propriété dépendant d'un entier en raisonnant par récurrence forte

  Exercices 22 à 26
- ▷ Savoir montrer un résultat en procédant par analyse-synthèse

  Exercices 27 à 32

Coup d'œil sur le chapitre

Les techniques développées dans ce chapitre seront utiles tout au long de l'année (et de la suivante !). Il est très important que le cheminement de votre raisonnement apparaisse dans votre rédaction. Précisez bien ce que vous supposez, ce que vous voulez montrer et comment vous comptez vous y prendre (par équivalence, par analyse-synthèse, par récurrence, etc).
Lors d'un raisonnement par récurrence, observez attentivement les étapes de votre raisonnement : utilisez-vous le résultat au rang juste avant ou avez-vous besoin

d'autres rangs ? Lorsque les résultats aux rangs $n-1$ et n sont nécessaires pour montrer le résultat au rang $n+1$, prenez garde à bien initialiser sur deux rangs consécutifs (0 et 1 par exemple).
Faites apparaître clairement les différentes étapes de votre raisonnement et le ou les arguments qui permettent d'affirmer ce que vous énoncez. Soyez précis et ne citez que les hypothèses de l'exercice dont vous avez besoin pour conclure. Le correcteur ne doit pas avoir à deviner ce que vous avez en tête.

Lorsque vous vous perdez en chemin, posez-vous les questions suivantes :

- Que cherche-t-on à montrer ?
- Quelle hypothèse n'ai-je pas encore utilisée ?

Le saviez-vous ?

Les paradoxes en logique sont apparus dès l'Antiquité. Déjà le philosophe grec Épiménide mettait en exergue la contradiction de la phrase « Un Crétois dit que les Crétois sont menteurs ». Ce n'est cependant que vers 1900 que ces paradoxes ont ébranlés la toute récente théorie des ensembles. Le logicien Bertrand Russell (1872-1970) définit l'ensemble de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes. Un tel ensemble, s'il n'appartient pas à lui-même y appartient et inversement. Ce paradoxe, obtenu par autoréférence, c'est-à-dire que la définition concerne l'objet lui-même, a été popularisé de manière plus imagée par celui-ci : dans un village le barbier rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-là. Le barbier se rase-t-il lui-même ?
Pour éviter ces paradoxes, on dut alors créer une théorie basée sur des axiomes permettant de construire les ensembles ; un ensemble est obtenu en partant d'ensembles élémentaires, comme les entiers, ou déjà construits, à l'aide d'opérations dûment répertoriées parmi lesquels, la réunion, l'ensemble des parties, etc. On n'a par exemple pas le droit de parler de l'ensemble de tous les ensembles.

Énoncés des exercices

Montrer des implications ou des équivalences

Exercice 1.
Montrer, sans calculatrice, que
$$\sqrt{2} \leqslant \sqrt[3]{3}.$$

Exercice 2.
Montrer, sans calculatrice, que
$$\frac{\sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Exercice 4.
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4$. Montrer que :
$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow b = d$ et $a = c$.

Exercice 5.
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4$. Montrer que :
$a \ln 2 + b \ln 3 = c \ln 2 + d \ln 3$
$\Leftrightarrow b = d$ et $a = c$.

Exercice 6.
Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que
$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z-1| = |z+1|.$$

Exercice 7.
Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que
$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow |z-1| = |z-i|.$$

Exercice 8.
Soit $f : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ montrer que
1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 1$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 8$.

Raisonnement par l'absurde

Exercice 9. Montrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 10. Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 11. *Principe des tiroirs*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On répartit au hasard $n+1$ chaussettes dans n tiroirs. Montrer qu'il existe au moins un tiroir contenant deux chaussettes.

Exercice 12. *Anniversaires dans une classe*
Une classe contient 37 élèves. Montrer qu'il existe au moins quatre élèves nés le même mois.

Exercice 13. *Somme de deux irrationnels*

Soit a et b deux rationnels strictement positifs. On suppose que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont irrationnels. Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est irrationnel.

Exercice 14. ($\star$)

Montrer qu'il n'existe pas d'entiers strictement compris entre $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{4n+2}$.

Exercice 15.

Montrer qu'il n'existe pas d'entier strictement compris entre $\sqrt{n(n+2)}$ et $(n+1)$.

Exercice 16. *Somme d'un irrationnel et d'un rationnel*

Soit $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $r+x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 17. *Produit d'un rationnel et d'un irrationnel*

Soit $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $rx \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow r = 0$.

Exercice 18. *Changement de signe d'une fonction affine*

Soit f la fonction définie par $f(x) = ax+1$ avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si f ne change pas de signe alors $a = 0$.

Exercice 19. *Imparité d'un entier dont le carré est impair*

Soit n un entier naturel. Montrer que n^2 impair implique n impair.

Raisonnement par récurrence

Exercice 20.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = 1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(n-1)\cdot n$. Démontrer que l'on a :

$$S_n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1).$$

Exercice 21. *Somme des cubes*

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = 1^3+2^3+\cdots+n^3$. Démontrer que l'on a :

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 22. *Terme général d'une suite définie par récurrence*

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$, $v_1 = 3$ et $v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n \left(1 + \frac{n}{2}\right)$.

Exercice 23. *Terme général d'une suite définie par récurrence*

On considère la suite définie par $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1+\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in N, u_n = 1 - \alpha + \alpha 2^n$.

Exercice 24. *Terme général d'une suite définie par récurrence*

Soit $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice 25. $(\star)$ *Décomposition d'un entier*

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(m, q) \in N^2$ tel que $n = 2^m q$ avec q impair.

Exercice 26. *Croissance d'une suite définie par récurrence*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2} + 1$. Montrer que la suite est strictement croissante.

Raisonnement par analyse-synthèse

Exercice 27. *Écriture à l'aide d'une fonction paire et d'une fonction impaire*

Montrer que toute fonction sur $\mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 28.

Montrer que toute fonction continue s'écrit comme la somme d'une fonction linéaire $x \mapsto ax$ et d'une fonction dont l'intégrale entre 0 et 1 est nulle.

Exercice 29.

Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction s'annulant en 0 et d'une fonction constante.

Exercice 30. Soit $u \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u| = 1 \Rightarrow \exists z \in \mathbb{C}^*, u = \frac{\overline{z}}{z}$.

Exercice 31.

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $x + 1 = \sqrt{x+3}$.

Exercice 32. ($\star$)

Soit n un entier naturel non nul. Montrer que si $n = 4m$ avec m un nombre premier impair, alors il s'écrit comme la différence de deux carrés de même parité.

Un petit coup de pouce

Ex. 1. Raisonner par équivalence.

Ex. 2. Raisonner par équivalence.

Ex. 3. Raisonner par équivalence.

Ex. 4. Raisonner par double implication et utiliser le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ex. 5. Raisonner par double implication et utiliser l'exercice 9.

Ex. 6. Raisonner par équivalence.

Ex. 7. Raisonner par équivalence.

Ex. 8. Faire apparaître un début d'identité remarquable pour écrire $f(x)$ comme la somme des deux carrés.

Ex. 14. Raisonner par l'absurde puis par équivalence.

Ex. 15. Raisonner par l'absurde puis par équivalence.

Ex. 16. Raisonner par l'absurde.

Ex. 17. Supposer $r = 0$ puis $r \neq 0$.

Ex. 18. Supposer $a \neq 0$ et trouver deux images de signes opposés.

Ex. 19. Montrer la contraposée.

Ex. 22. Raisonner par récurrence forte sur n.

Ex. 23. Raisonner par récurrence forte sur n.

Ex. 24. Raisonner par récurrence forte sur n.

Ex. 25. Raisonner par récurrence forte sur n.

Ex. 26. Montrer, par récurrence forte sur n que $u_{n+1} > u_n$.

Ex. 27. Supposer que $f = g + h$ avec g paire et h impaire et évaluer f en $-x$ pour exprimer $g(x)$ et $h(x)$.

Ex. 28. Supposer que c'est le cas et déterminer la valeur de a.

Ex. 29. Supposer que c'est le cas et déterminer la fonction constante.

Ex. 30. Écrire $u = e^{i\theta}$ et $z = re^{i\alpha}$ et trouver une condition nécessaire sur z.

Ex. 31. Supposer qu'un tel x existe et regarder ce que cela implique, en gardant en tête le fait que x est alors positif.

Ex. 32. Supposer que $4m = a^2 - b^2$ et déterminer les valeurs possibles pour a et b.

Solutions

Exercice 1.
On raisonne par équivalence :

$$\sqrt{2} \leqslant \sqrt[3]{3} \iff \left(\sqrt{2}\right)^6 \leqslant \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 \iff 8 \leqslant 9.$$

La dernière inégalité est vraie. Par équivalence, on en déduit que la première l'est aussi donc $\sqrt{2}$ est bien inférieur à $\sqrt[3]{3}$.

Exercice 2.
On raisonne par équivalence :

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \iff \sqrt{5}\sqrt{3} \leqslant 4 \iff 15 \leqslant 16.$$

La dernière inégalité est vraie. Par équivalence, on en déduit que la première l'est aussi donc $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ est bien inférieur à $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Exercice 3.
On raisonne par équivalence pour chacune des inégalités :

$$\begin{aligned} & \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} && \quad \textit{car } 2\sqrt{n} > 0 \\ \iff & 2\sqrt{n(n+1)} - 2n \leqslant 1 \\ \iff & 2\sqrt{n(n+1)} \leqslant 2n+1 && \quad \textit{par positivité des deux membres} \\ \iff & 4n(n+1) \leqslant (2n+1)^2 \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, on a montré, par équivalence, que :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n}-\sqrt{n-1} && \textit{car } 2\sqrt{n}>0\\
\Leftrightarrow\ & 1 \leqslant 2n - 2\sqrt{n(n-1)} &&\\
\Leftrightarrow\ & 2\sqrt{n(n-1)} \leqslant 2n-1 && \textit{par positivité des}\\
\Leftrightarrow\ & 4n(n-1) \leqslant (2n-1)^2 && \textit{deux membres}
\end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, on a montré, par équivalence, que :

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n}-\sqrt{n-1}.$$

Remarque : Dans le chapitre dérivabilité, on montrera que l'on peut obtenir cet encadrement en utilisant le théorème des accroissements finis.

Exercice 4.

On raisonne par double implication.

$\Rightarrow$ On suppose $b=d$ et $a=c$. Il est clair que $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$.

$\Leftarrow$ Supposons maintenant $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$. On a alors $a-c=(d-b)\sqrt{2}$. Si $b\neq d$, alors $\sqrt{2}=\dfrac{a-c}{d-b}$ donc $\sqrt{2}$ est un quotient d'entiers ce qui est impossible car $\sqrt{2}$ est irrationnel. On a donc $b=d$ ce qui implique $a=c$.

Exercice 5.

On raisonne par double implication.

$\Rightarrow$ On suppose $b=d$ et $a=c$. Il est clair que $a\ln 2+b\ln 3=c\ln 2+d\ln 3$.

$\Leftarrow$ Supposons maintenant $a\ln 2+b\ln 3=c\ln 2+d\ln 3$. On a alors :

$$(a-c)\ln 2=(d-b)\ln 3.$$

Si $b\neq d$, alors $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}=\dfrac{a-c}{d-b}$ donc $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est un quotient d'entiers ce qui est impossible car $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel d'après l'exercice 1.9. On a donc $b=d$ ce qui implique $a=c$.