# Chapitre 1

# Anneaux, morphismes et idéaux

## 1.1 Définition

**Définition 1.1** Un ***anneau (unitaire)*** $(A, +, \cdot)$ est un ensemble $A$ muni de deux lois de composition interne

— L'addition notée $+$: $A \times A \to A,\ (a, b) \mapsto a + b$

— La multiplication notée $\cdot$: $A \times A \to A,\ (a, b) \mapsto a \cdot b$

qui satisfont les propriétés suivantes :

1. $(A, +)$ est un groupe commutatif. On note $0_A$ ou simplement $0$ son élément neutre et $-a$ l'opposé de $a$ dans $A$ défini par la condition $(-a) + a = a + (-a) = 0$.
2. la loi $\cdot$ est associative : tout triplet $(a, b, c)$ d'éléments de $A$ vérifie $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. La multiplication est distributive par rapport à l'addition : tout triplet $(a, b, c)$ d'éléments de $A$ vérifie $(a+b)\cdot c = (a\cdot c)+(b\cdot c)$ et $c\cdot(a+b) = (c\cdot a)+(c\cdot b)$.
4. il existe un élément neutre pour la multiplication, appelé un élément *unité* de $A$ et noté $1_A$ ou plus simplement $1$ qui vérifie la condition $1_A \cdot a = a \cdot 1_A = a$ pour tout élément $a$ de $A$.

Un anneau $A$ est dit ***commutatif*** si, en outre, $a \cdot b = b \cdot a$ pour tout couple $(a, b)$ d'éléments de $A$.

Soit $1$ et $1'$ deux éléments unités dans $A$, alors $1 \cdot 1' = 1 = 1'$. Il en résulte qu'un anneau (unitaire) possède exactement un élément unité. Certains livres ne demandent pas dans la définition d'un anneau qu'il soit unitaire, il est essentiel de vérifier ce point dans la définition. Dans le reste du livre, comme il est d'usage lorsqu'on utilise une seule multiplication, on omet le $\cdot$ du produit et on note $ab$ au lieu de $a \cdot b$.

EXEMPLES.

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, muni de l'addition et de la multiplication des entiers, est un anneau commutatif.
2. L'ensemble $2\mathbb{Z} = \{2n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ des entiers pairs, muni de l'addition et de la multiplication des entiers, ne possède pas d'élément unité mais vérifie toutes les autres propriétés d'un anneau commutatif.
3. L'anneau nul $\{0\}$, vérifiant $0 + 0 = 0$ et $0 \cdot 0 = 0$, est un anneau unitaire. C'est le seul anneau dans lequel $1 = 0$. En effet, s'il existe un élément non nul $a \neq 0$ dans $A$, alors $0 \cdot a = 0 \neq a$ et il en résulte que $0 \neq 1$.
4. Pour un entier $n$ l'anneau $A = \mathrm{M}(n, B)$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans un anneau $B$ est un anneau. Pour $n = 2$ et $B \neq \{0\}$ nous avons

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   L'anneau $A$ est non commutatif pour $B \neq \{0\}$ et $n \geq 2$. □

**Définition 1.2** Soit $A$ et $B$ deux anneaux. Une application $\varphi\colon A \to B$ est un ***morphisme*** (d'anneaux unitaires) si :

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ pour tous $a, b$ dans $A$ ;
2. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ pour tous $a, b$ dans $A$ ;
3. $\varphi(1_A) = 1_B$.

Le ***noyau*** du morphisme $\varphi$ est $\ker(\varphi) = \{a \in A;\ \varphi(a) = 0\}$ et ***l'image*** du morphisme $\varphi$ est $\mathrm{im}(\varphi) = \{\varphi(a);\ a \in A\}$.

— Un morphisme bijectif $\varphi$ est un ***isomorphisme***. La notation $A \cong B$ signifie qu'il existe un isomorphisme d'anneaux $\varphi\colon A \to B$.
— Un ***endomorphisme*** est un morphisme de l'anneau vers lui même.
— Un ***automorphisme*** est un endomorphisme bijectif.

On note $\varphi : A \hookrightarrow B$ un morphisme d'anneaux injectif et $\varphi : A \twoheadrightarrow B$ un morphisme d'anneaux surjectif.

Notons quelques conséquences immédiates de cette définition. Un morphisme $\varphi$ vérifie $\varphi(0_A) = \varphi(0_A + 0_A) = \varphi(0_A) + \varphi(0_A)$. En ajoutant $-\varphi(0_A)$ aux deux membres, nous obtenons $\varphi(0_A) = 0_B$. De même $0_B = \varphi(0_A) = \varphi(a+(-a)) = \varphi(a)+\varphi(-a)$ pour tout élément $a$ de $A$. L'unicité de l'opposé dans le groupe $(B, +)$ entraîne $\varphi(-a) = -\varphi(a)$. La composition de deux morphismes d'anneaux est un morphisme d'anneaux. Par définition un morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ est surjectif si, et seulement si, $\mathrm{im}(\varphi) = B$.

**Lemme 1.3** Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux. Le morphisme $\varphi$ est injectif si, et seulement si, $\ker(\varphi) = \{0_A\}$. Si $\varphi$ est un isomorphisme, alors l'application inverse $\varphi^{-1}$ est également un morphisme d'anneaux.

DÉMONSTRATION. Si $\varphi$ est injectif, alors $\ker(\varphi) = \{0_A\}$. Supposons maintenant $\ker(\varphi) = \{0_A\}$. Soit $a$ et $b$ dans $A$ tels que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Alors, $\varphi(a) - \varphi(b) = 0_B$ et donc $\varphi(a - b) = 0_B$. L'hypothèse $\ker(\varphi) = \{0_A\}$ montre que $a = b$. Par conséquent, $\varphi$ est injectif.

Supposons que le morphisme $\varphi$ soit bijectif. Pour tous $\alpha = \varphi(a)$ et $\beta = \varphi(b)$ dans $B$ nous avons $\varphi^{-1}(\alpha + \beta) = \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(b)) = \varphi^{-1}(\varphi(a + b)) = a + b = \varphi^{-1}(\alpha) + \varphi^{-1}(\beta)$. De même, $\varphi^{-1}(\alpha\beta) = \varphi^{-1}(\alpha)\varphi^{-1}(\beta)$ et donc $\varphi^{-1}$ est un morphisme d'anneaux. ∎

Les morphismes injectifs permettent d'identifier des objets. En algèbre linéaire il est classique d'identifier les nombres réels aux matrices scalaires $\lambda I_n$ de $M(n, \mathbb{R})$ où $I_n$ désigne la matrice unité de $M(n, \mathbb{R})$. Les morphismes permettent également de transporter des calculs vers d'autres anneaux et de développer des algorithmes. Cette identification est largement exploitée dans la suite.

**Définition 1.4** Un élément $a$ d'un anneau $A$ est dit ***inversible*** s'il existe un élément $b$ dans $A$ tel que $a \cdot b = b \cdot a = 1$, appelé ***inverse*** de $a$. Si $A$ n'est pas l'anneau nul (dans ce cas $1 \neq 0$) et si tous les éléments non nuls de $A$ sont inversibles, alors $A$ est appelé un ***corps***. Si de plus $A$ est commutatif, alors $A$ est un ***corps commutatif***.

**Proposition et définition 1.5** Soit $A$ un anneau. L'ensemble $U(A)$ des éléments inversibles est stable pour la multiplication. Muni de la multiplication induite par celle de $A$ l'ensemble $U(A)$ est un groupe, appelé ***groupe multiplicatif*** de $A$, dont l'élément neutre est l'élément unité $1_A$ de $A$.

**Exemple 1.6** $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$, $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $U(M(n, \mathbb{R})) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

**Définition 1.7** Un élément $a$ d'un anneau $A$ est un ***diviseur de zéro*** (à gauche) si l'application $\varphi_a : A \to A, \quad x \mapsto a \cdot x$ n'est pas injective.

Un diviseur de zéro à droite est défini de manière analogue.

Dans un anneau commutatif les notions de diviseur de zéro à droite et à gauche coïncident et on parle de diviseur de zéro.

Parfois la définition équivalente suivante est utilisée : $a$ dans $A$ est un diviseur de zéro à gauche si, et seulement si, il existe $b \neq 0$ dans $A$ vérifiant $ab = 0$. Montrons l'équivalence de ces deux définitions. Si $A$ possède plus d'un élément, alors $\varphi_a$ non injective implique qu'il existe $b \neq b'$ dans $A$ tels que $ab = ab'$ ou encore tels que $a(b - b') = 0$. Donc si $A$ possède plus d'un élément, alors pour un diviseur de zéro $a$

de $A$ il existe $c = b - b'$ dans $A$ non nul tel que $a \cdot c = 0$. Réciproquement, s'il existe $c$ dans $A$ non nul tel que $a \cdot c = 0$, alors $\varphi_a$ n'est pas injective puisque $a \cdot c = a \cdot 0 = 0$.

Si $a$ dans $A$ n'est pas un diviseur de zéro à gauche, alors $ab = 0$ implique $b = 0$ En effet, tout $b$ dans $A$ vérifie $\varphi_a(b) = ab = 0 = \varphi_a(0)$ et, puisque $\varphi_a$ est injective, il en résulte que $b = 0$.

**Définition 1.8** Un anneau $A$ est dit ***intègre*** si

1. $A \neq \{0\}$ ;
2. $A$ est commutatif (et unitaire) ;
3. $0$ est l'unique diviseur de zéro.

Dans un anneau intègre le produit de deux éléments non nuls est non nul.

**Lemme 1.9** Dans un anneau intègre nous pouvons utiliser la règle de simplification suivante : pour $a, b, c$ dans $A$ avec $a$ non nul, la relation $ab = ac$ implique $b = c$.

EXEMPLES. L'anneau nul $(\{0\}, +, \cdot)$ est un anneau unitaire avec $1_A = 0_A$. Il ne contient pas de diviseurs de zéro, il n'est pas intègre et ce n'est pas un corps.

L'anneau des entiers $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau intègre mais pas un corps commutatif.

Les anneaux $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ et $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sont des corps commutatifs.

Pour $n \geq 2$ l'anneau $\mathrm{M}(n, \mathbb{C})$ des matrices de taille $n$ par $n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau non commutatif et non intègre.

L'algèbre des quaternions $\mathbb{H}$ de l'exercice 1.15 est un corps (non commutatif). □

**Définition 1.10** Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau (unitaire). Un ***sous-anneau*** de $A$ est un sous-ensemble $B$ de $A$ stable pour les deux opérations de $A$ avec la propriété que $B$, muni de la restriction de ces deux opérations, soit un anneau et que $1_B = 1_A$.

La condition $1_B = 1_A$ garantit que l'inclusion de $B$ dans $A$ donne lieu à un morphisme unitaire injectif, le ***morphisme d'inclusion***, $B \hookrightarrow A$ avec $b \mapsto b$. Notons qu'un sous-anneau d'un anneau intègre est toujours intègre.

**Exemple 1.11** $A = \mathrm{M}(2, \mathbb{R})$ et $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R} \right\}$ sont deux anneaux avec $B \subset A$. Cependant $B$ n'est pas un sous-anneau de $A$ car $1_A \neq 1_B$.

**Lemme 1.12** Soit $S$ un sous-ensemble d'un anneau $A$. Alors $S$ est un sous-anneau de $A$ si, et seulement si, $S$ contient $1_A$ et pour tout couple $(a, b)$ d'éléments de $S$, les éléments $a - b$ et $ab$ appartiennent aussi à $S$.

DÉMONSTRATION. Si $S$ est un sous-anneau, la condition est clairement vérifiée. Montrons la réciproque. Comme $S$ est non vide et que $a - b$ appartient à $S$ pour tout $a$ et tout $b$ dans $S$, nous en déduisons que $(S, +)$ est un sous-groupe. Comme $ab$ appartient à $S$ pour tous $a$ et $b$ dans $S$, la multiplication peut être restreinte à $S$. L'associativité et la distributivité sont vérifiées pour tous les éléments de $A$ et donc aussi pour ceux de $S$. ∎

EXEMPLE. L'anneau $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$. □

**Théorème et définition 1.13** Soit $n$ dans $\mathbb{N}$ avec $n > 0$ et $A_1, \ldots, A_n$ des anneaux. Sur l'ensemble $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n);\ a_i \in A_i\}$ nous définissons les opérations suivantes :

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) &= ((a_1 + b_1), (a_2 + b_2), \ldots, (a_n + b_n)) \\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) &= (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n)\,.\end{aligned}$$

L'ensemble $\prod_{i=1}^{n} A_i$ muni de ces deux opérations est un anneau appelé ***anneau produit*** des anneaux $A_1, \ldots, A_n$. Il a pour élément nul $(0, \cdots, 0)$ et pour élément unité $(1, \cdots, 1)$.

Les applications $p_i : \prod_{i=1}^{n} A_i \to A_i; (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mapsto a_i$ sont des morphismes d'anneaux surjectifs.

DÉMONSTRATION. La démonstration est laissée en exercice. ∎

EXEMPLE. Un produit $A_1 \times A_2$ d'anneaux non nuls n'est jamais intègre. Comme $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$, les éléments $(0, 1)$ et $(1, 0)$ sont des diviseurs de zéro. □

## 1.2 Idéaux

**Définition 1.14** Soit $A$ un anneau. Un sous-ensemble $I \subset A$ est un ***idéal*** de $A$ si :

1. $(I, +)$ est un sous groupe de $(A, +)$ ;
2. les produits $ab$ et $ba$ appartiennent à $I$ pour tout $a$ dans $A$ et tout $b$ dans $I$ (propriété d'absorption).

Un anneau $A$ non nul possède toujours les deux idéaux $\{0\}$ et $A$. Si un idéal $I$ de $A$ contient $1_A$, alors $a \cdot 1_A = a$ appartient à $I$ pour tout $a$ dans $A$ et donc $I = A$. Par conséquent, un idéal $I \neq A$ n'est jamais un sous-anneau de $A$.

EXEMPLE. Pour tout morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ le noyau $\ker(\varphi)$ est un idéal de $A$. L'objectif de la prochaine section est de montrer que tout idéal de $A$ est le noyau d'un morphisme. □

**Exemple 1.15** Montrons que les idéaux $I$ de $\mathbb{Z}$ sont les sous-ensembles de la forme $n\mathbb{Z} = \{nk;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Si $I = \{0\}$ alors $I = 0\mathbb{Z}$. Sinon, quitte à prendre l'opposé, $I$ contient un élément positif non nul. Comme toute partie non vide de $\mathbb{N}$ contient un plus petit élément, il existe un plus petit élément positif non nul $n$ dans $I$. L'entier $n$ appartenant à $I$, le sous-groupe additif $n\mathbb{Z}$ engendré par $n$ est inclus dans $I$. Pour un élément $a$ de $I$, considérons la division avec reste $a = qn + r$ avec soit $r = 0$, soit $0 < r < n$. Si $r = 0$, alors $a$ appartient à $n\mathbb{Z}$. Sinon, $r = a - qn$ est un élément positif non nul de $I$ avec $r < n$, et nous aboutissons à une contradiction. Donc $a = qn$ et $I \subset n\mathbb{Z}$, ce qui implique que $I = n\mathbb{Z}$ avec $n$ le plus petit entier positif contenu dans $I$.

**Proposition 1.16** Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux et $I \subset A$, $J \subset B$ des idéaux. Alors :

1. L'ensemble $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal de $A$. En particulier, $\ker(\varphi)$ est un idéal de $A$.
2. Si $\varphi$ est *surjectif*, alors $\varphi(I)$ est un idéal de $B$.

DÉMONSTRATION. Comme $\varphi$ est, en particulier, un morphisme de groupes additifs, $\varphi(I) \subset B$ et $\varphi^{-1}(J) \subset A$ sont des sous-groupes additifs.

Montrons que $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal de $A$. Si $a$ appartient à $A$ et $b$ appartient à $\varphi^{-1}(J)$, alors $\varphi(b)$ appartient à $J$ et $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ appartient à $J$. Il en résulte que $ab$ appartient à $\varphi^{-1}(J)$. De même, $ba$ appartient à $\varphi^{-1}(J)$. Par conséquent, $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal. En particulier, comme $\{0\}$ est un idéal de $B$, $\ker(\varphi)$ est un idéal de $A$.

Montrons que si $\varphi$ est surjectif, alors $\varphi(I)$ est un idéal de $B$. Pour tout $\alpha$ dans $B$, il existe $a$ dans $A$ avec $\varphi(a) = \alpha$. Un élément $\beta = \varphi(b)$ dans $\varphi(I)$ avec $b$ dans $I$ satisfait $\beta\alpha = \varphi(b)\varphi(a) = \varphi(ba)$. Puisque $b$ appartient à $I$, $ba$ appartient à $I$. Il en résulte que $\varphi(ba) = \beta\alpha$ appartient à $\varphi(I)$. De même, $\alpha\beta$ appartient à $\varphi(I)$ et le résultat s'ensuit. ∎

EXEMPLE. La surjectivité est nécessaire comme le montre le morphisme d'inclusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$. L'image $\mathbb{Z}$ (abus de notation) de l'idéal $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ n'est pas un idéal de $\mathbb{R}$ car $\frac{1}{2} \cdot 1$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}$. □

**Théorème et définition 1.17** (PROPRIÉTÉ UNIVERSELLE DE $\mathbb{Z}$) Soit $A$ un anneau unitaire. Il existe un unique morphisme $\varphi\colon \mathbb{Z} \to A, m \mapsto m \cdot 1_A = \underbrace{1_A + \cdots + 1_A}_{m}$.
Le noyau de ce morphisme est de la forme $n\mathbb{Z}$ pour un unique entier positif $n$, appelé la ***caractéristique*** de $A$.

DÉMONSTRATION. La vérification des propriétés de morphisme pour cette application est immédiate. Le noyau $\ker(\varphi)$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n$, un unique entier positif (voir exemple 1.15). ∎

## 1.3 Anneaux quotients

Soit $X$ un ensemble. Une ***relation*** sur $X$ est un sous-ensemble $R \subset X \times X$. Si $(x, y)$ appartient à $R$, alors « $x$ est en relation avec $y$ », noté $x \sim y$.

**Définition 1.18** Une ***relation d'équivalence*** $\sim$ sur un ensemble $X$ est une relation $\sim$ sur $X$ telle que

1. $\sim$ est ***réflexive*** : $x \sim x$ pour tout $x$ dans $X$ ;
2. $\sim$ est ***symétrique*** : $x \sim y$ implique $y \sim x$ pour tous $x$ et $y$ dans $X$ ;
3. $\sim$ est ***transitive*** : $x \sim y$ et $y \sim z$ implique $x \sim z$ pour tous $x, y, z$ dans $X$.

**Définition 1.19** Soit $X$ un ensemble, $\sim$ une relation d'équivalence sur $X$ et $x$ dans $X$. L'ensemble $\overline{x} = \{y \in X,\ x \sim y\}$ est la ***classe d'équivalence*** de $x$ ou simplement la ***classe*** de $x$.

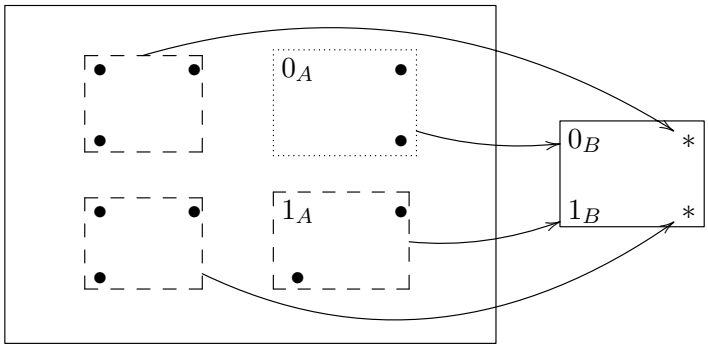
**Définition 1.20** Une ***partition*** d'un ensemble $X$ est une décomposition de $X$ en une union disjointe de sous-ensembles non vides $X_i$ de $X$, indexés par un ensemble $I$. De manière équivalente $X = \cup_{i \in I} X_i$ avec $X_i \neq \emptyset$ et $X_i \cap X_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$.

Les classes d'équivalence forment une partition de $X$. Réciproquement, étant donnée une partition $X = \cup_i X_i$ de $X$, la relation « $x$ et $y$ appartiennent au même sous-ensemble $X_i$ » définit une relation d'équivalence sur $X$. Les $X_i$ sont alors les classes d'équivalence de cette relation d'équivalence. Une relation d'équivalence sur un ensemble $X$ est identique à une partition de l'ensemble $X$.

**Définition 1.21** Etant donnée une relation d'équivalence $\sim$ sur un ensemble $X$, l'ensemble $X/\sim\ = \{\overline{x};\ x \in X\}$ des classes d'équivalence est appelé ***ensemble quotient*** de $X$ par $\sim$. L'application surjective $\pi : X \twoheadrightarrow X/\sim$ donnée par $x \mapsto \overline{x}$ est appelée ***l'application canonique*** associée.

L'application canonique est surjective car une classe d'équivalence n'est jamais vide.

Considérons un morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ dont le noyau est un idéal $K = \ker(\varphi)$. Pour $a$ dans $A$ notons $a + K = \{a + k;\ k \in K\}$. Deux éléments $a_1$ et $a_2$ dans $A$ ont la même image si, et seulement si, $a_1 - a_2$ appartient à $K$ ou encore $a_1$ appartient à $a_2 + K$ (ou $a_2$ appartient à $a_1 + K$). Les sous-ensembles $a + K$ forment donc une partition de $A$ en sous-ensembles dont les éléments possèdent tous la même image par $\varphi$. Le diagramme suivant montre la partition de $A$ en sous-ensembles ayant la même image, le sous-ensemble en pointillés contient $0_A$ et correspond à l'idéal $K$ :




Notre objectif est de montrer que tout idéal $I$ de $A$ est le noyau d'un morphisme en construisant un anneau $C$ et un morphisme $\psi : A \to C$ de noyau $I$ à partir seulement de l'anneau $A$ et de l'idéal $I$. Nous allons prouver que $a \sim_I b \Leftrightarrow a - b \in I$ est une relation d'équivalence et que l'ensemble des classes d'équivalence correspondantes $A/\sim_I = \{a + I;\, a \in A\}$ muni des lois $(a_1 + I) + (a_2 + I) = (a_1 + a_2) + I$ et $(a_1 + I)(a_2 + I) = (a_1 a_2) + I$ est un anneau. Le morphisme $\psi$ correspond alors à l'application canonique $\pi : A \to A/\sim_I,\ a \mapsto a + I$ et son noyau est $I$.

**Définition 1.22** Soit $E$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $* : E \times E \to E$ et $\sim$ une relation d'équivalence sur $E$. La relation d'équivalence $\sim$ est dite compatible avec la loi $*$ sur $E$ si pour tous $x_1$, $x_2$, $y_1$ et $y_2$ dans $E$ tels que $x_1 \sim x_2$ et $y_1 \sim y_2$ nous avons $x_1 * y_1 \ \sim\ x_2 * y_2$.

EXEMPLE. Considérons le sous-groupe additif $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ;\, a \in \mathbb{R} \right\}$ de l'anneau $A = \mathrm{M}(2, \mathbb{R})$. La partition en classes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + B$ du sous-groupe additif $(B, +)$ du groupe additif $(A, +)$ définit une relation d'équivalence sur $A$ donnée par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in B.$$

Comme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, mais

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \not\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La relation d'équivalence n'est donc pas compatible avec la multiplication. □