

Introduction

Le premier congrès international sur les Fractales a eu lieu en 1982, à Courchevel. Une heureuse conjoncture m'a permis d'y participer, et d'y rencontrer l'initiateur du congrès, Benoît Mandelbrot, venu y apporter le charisme qui lui est propre, sa puissante intuition géométrique et le mot « fractal » lui-même. Le mot a permis de désigner une nouvelle notion scientifique ; il lui a, en quelque sorte, donné l'existence.

Qu'est-ce qui a fait la force de la notion de Fractal et en a justifié l'essor ? Sans doute son caractère interdisciplinaire, le fait qu'elle ressortisse à presque tous les domaines de la science et sache en offrir des illustrations séduisantes. Il ne s'agit pas d'une théorie close, où s'enchaînent définitions et théorèmes dans un ordre presque mécanique. D'ailleurs, les essais de définition mathématique du mot *fractal* n'ont jamais été vraiment concluants. Le mot s'applique à un domaine dont le noyau dur a toujours été constitué des ensembles dits « auto-similaires » (ou à similitude interne, ou *self-similar*), et maintenant les mesures auto-similaires, mais on y trouve bien davantage et la frontière en est assez floue, tels objets étant considérés comme fractals par certains auteurs et non par d'autres.

La première approche qualitative du concept fractal, et qui en reste la meilleure description, est la suivante : c'est un objet « irrégulier à toutes les échelles », ou plus précisément, tel que « toute partie est semblable au tout ». Mais quelle est la nature de cet objet ? Longtemps il s'est agi de courbes (côtes géographiques très découpées, profils de surfaces rugueuses, fonctions de valeurs boursières,...) ou d'ensembles nulle part denses (population des étoiles dans la galaxie), et des modèles mathématiques qui les représentaient : les ensembles auto-similaires tels que la courbe du flocon de neige (1895) ou l'ensemble de Cantor (1885), les courbes auto-affines telles que la courbe de Takagi (1910), de Knopp (1935), de McMullen (1985) etc. Certains de ces modèles sont en effet fort anciens. Des ensembles, la notion a glissé par la suite aux procédés de construction eux-mêmes, en particulier aux Systèmes de Fonctions Itérées (*IFS*) développés par M. Barnsley et son équipe, qui maintenant forment une branche du domaine des Systèmes Dynamiques. Dans cette optique l'ensemble fractal est plutôt un « attracteur », point fixe d'une application contractante dans l'espace des ensembles compacts. A ce titre le carré (réunion de quatre copies de lui-même dans le rapport $\frac{1}{2}$) peut être considéré comme fractal. Le mot s'applique alors

plutôt au procédé de construction, qui est fait de contractions et de subdivisions à toutes les échelles. En y ajoutant un système de probabilités on peut construire du même coup une mesure, supportée par l'attracteur, et dont le premier exemple fut la mesure singulière construite sur $[0,1]$ par A.S. Besicovitch (1934). Cette mesure et d'autres du même type, également appelées « fractales », ont donné naissance à ce qu'on appelle maintenant l'Analyse Multifractale.

Les bases mathématiques de l'Analyse Fractale sont donc très diverses, et elles tirent parti de la plupart des domaines connus. Il faut souligner l'apport de l'algèbre linéaire (pour les mécanismes d'itérations), de la topologie (pour la structure des ensembles étudiés) et surtout de la théorie de la mesure (dimensions fractales, mesures singulières etc.). Mais il n'est pas nécessaire de devenir un spécialiste en tel ou tel domaine, et même en théorie de la mesure, pour s'y intéresser. Ce livre cherche à décrire les faits essentiels, en essayant de retrouver l'intuition originelle. Il a fallu pour cela éviter les symbolismes et les généralisations qui alourdissent le propos. Comme la rigueur mathématique doit être toujours présente, il reste des difficultés techniques mais elles ont été réduites autant que possible.

C'est en donnant un enseignement sur ce sujet à l'École Polytechnique de Montréal, et plus tard à Clermont en DEA, que cet ouvrage a pris naissance. Comme toujours, l'intérêt et la qualité des étudiants ont inspiré le projet. Pour le lire il faudra bien sûr quelques connaissances préalables : la dérivée d'une fonction à une variable, les dérivées partielles en cas de plusieurs variables, un peu de théorie des ensembles (élémentaire), les vecteurs et matrices carrées en dimension 2 ou 3... Beaucoup de notions utiles sont rappelées, dans le contexte qui nous intéresse. Par exemple, la topologie métrique est abordée en dimension 2, non de façon abstraite mais sous l'angle des propriétés géométriques de la boule unité. Les mesures sont décrites de façon résolument « constructive », souvent en utilisant des arbres, et c'est pourquoi nous ne parlons que de mesures de Borel, et d'ensembles boréliens.

À ce propos, le concept d'ensembles mesurables, introduit par Caratheodory, et nécessaire à une approche abstraite de la mesure, est inutile et ne doit pas constituer un obstacle pour débiter dans l'univers des ensembles et mesures fractals. Ici comme partout l'axiomatique freine l'intuition, et c'est sans doute pourquoi la Théorie de la Mesure est considérée comme une science difficile, que l'on n'aborde qu'assez tard, bien à tort. Vue comme fonction additive d'ensembles, la notion de mesure est plutôt simple et d'expérience courante. Personne n'a de difficultés conceptuelles avec des quantités telles que la longueur, l'aire, un budget à répartir ou même avec les lois de probabilités élémentaires. « Il ne faut pas guinder l'esprit », ce principe proposé par Pascal a été l'inspiration de cet ouvrage. Nous ne résistons pas au plaisir de citer la suite : « L'une des raisons principales qui éloignent autant ceux qui entrent dans les connaissances du véritable chemin qu'ils doivent suivre est l'imagination qu'on prend d'abord que les bonnes choses sont inaccessibles, en leur donnant le nom de grandes, hautes, élevées, sublimes. Cela

perd tout. ».

Nous espérons donc que le présent ouvrage puisse donner une bonne intuition géométrique de ce qu'est une mesure, son support et ses propriétés de densité locale. Le lecteur y trouverait alors une aide singulière dans sa poursuite de développements plus abstraits, sur lesquels les publications spécialisées ne manquent pas.

On l'a compris, ce livre s'adresse avant tout à l'étudiant ou au chercheur non spécialisé. Il pourrait intéresser un étudiant de premier cycle universitaire ou de classes préparatoires, par son approche géométrique. Un étudiant de Master devrait aussi le trouver utile, car il est conçu pour servir de base à des cours de Théorie Géométrique de la Mesure plus avancés. L'enseignant trouvera, dans les exercices, un certain nombre de sujets de réflexion pouvant servir à un projet de fin d'études. Les solutions sont proposées à la fin de l'ouvrage. Si l'on veut en savoir davantage, on lira avec intérêt les divers ouvrages de K. Falconer, par exemple *The Geometry of Fractal Sets*, le livre de M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, celui de G. Edgar, *Measure, Topology and Fractal Geometry*, ou celui de P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*.

Les figures ont été faites par l'auteur avec MatLab, et le texte, typographié en LaTeX.

Des collègues ont bien voulu relire certains chapitres et m'ont adressé des critiques très appréciées, en particulier Gentiane Bichard qui enseigne en classes préparatoires, et Yanick Heurteaux à l'Université Blaise Pascal. Ils m'ont fait part de leur précieuse expérience et ont apporté de multiples précisions et de simplifications. Bien entendu, s'il subsiste des erreurs c'est à moi-même qu'elle sont imputables. Mais je leur adresse pour leur aide mes plus vifs remerciements.

Claude Tricot

Première partie

Orbites et systèmes itérés

Chapitre 1

Orbites et points fixes

Les ensembles fractals sont souvent obtenus comme le résultat d'une suite d'opérations d'un type particulier : on part d'un ensemble donné, on le remplace par une réunion de copies restreintes (ou *contractées*) de lui-même, on remplace chacune de ces copies par une réunion de copies restreintes, etc. Au fond c'est le processus qui est *fractal*, au sens étymologique du terme, plutôt que le résultat final. Dans certains cas celui-ci est d'ailleurs tout à fait banal. L'important est de dégager cette notion de *point fixe*, ou d'*attracteur*, qui est le résultat vers lequel toutes les orbites tendent, indépendamment du point de départ. On commence dans ce chapitre par étudier la dynamique d'une application unique. On insiste sur la géométrie des orbites, qui permettra de mieux comprendre, au cours des chapitres 3 et 4, la structure complexe des attracteurs d'un système de plusieurs applications.

1.1 Dynamique d'une fonction

Les notions les plus générales sont introduites dans un espace \mathcal{E} quelconque, car elles sont utiles dans différents contextes. Cependant les exemples de cette section ne mettent en jeu que des applications de \mathbb{R}^D dans lui-même. Il n'est pas nécessaire de faire beaucoup d'hypothèses sur \mathcal{E} pour pouvoir parler d'orbites : cependant on a besoin de la notion de *convergence*, de *limite de suite* et de *continuité*. Il faut donc que \mathcal{E} soit un *espace topologique* : par exemple un *espace métrique*, sur lequel est définie une notion de distance. Nous reprendrons les espaces métriques de façon plus détaillée dans le chapitre 2.

1.1.1 Orbites

On considère une fonction $\mathbf{f} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$. Son comportement *dynamique* est caractérisé par les propriétés de ses *itérées*, et tout particulièrement par les *orbites* d'un point.

L'itérée $\mathbf{f} \circ \mathbf{f}$ est définie par

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x})).$$

On la note $\mathbf{f}^{\circ 2}$. D'une manière générale,

$$\mathbf{f}^{\circ 1} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{f}^{\circ(n+1)} = \mathbf{f} \circ \mathbf{f}^{\circ n}.$$

L'**orbite** de \mathbf{x}_0 (par la fonction \mathbf{f}), est la suite (\mathbf{x}_n) définie par la relation

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n).$$

Il en résulte que $\mathbf{x}_n = \mathbf{f}^{\circ n}(\mathbf{x}_0)$.

Comme toute suite, une orbite peut être *convergente* ou *divergente*. Dans ce livre nous ne nous intéressons qu'aux orbites convergentes.

Par extension, il est habituel de noter $\mathbf{f}(E)$, pour tout sous-ensemble E de \mathcal{E} , l'ensemble formé de toutes les images par \mathbf{f} des points de E . On appelle donc aussi *orbite de E* la suite

$$(E, \mathbf{f}(E), \dots, \mathbf{f}^{\circ n}(E), \dots),$$

où E est l'ensemble de départ.

1.1.2 Point fixe

Un **point fixe** de \mathbf{f} est un point \mathbf{x}^* tel que

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*).$$

Si \mathbf{x}^* est point fixe, l'orbite partant de \mathbf{x}^* est réduite à lui-même : c'est la suite constante $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}^*$. Si un ensemble E contient \mathbf{x}^* , tous les ensembles $\mathbf{f}^{\circ n}(E)$ contiennent \mathbf{x}^* également.

Proposition 1.1 *Si \mathbf{f} est continue, toute limite d'orbite convergente est point fixe.*

Démonstration. En effet, si (\mathbf{x}_n) converge vers une limite \mathbf{x}^* , par continuité $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ converge vers $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$. Mais $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_{n+1}$, donc $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ converge vers \mathbf{x}^* . Comme une limite de suite convergente est unique, on en déduit que $\mathbf{x}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$. Donc \mathbf{x}^* est point fixe. \square

Bien sûr certaines fonctions n'ont aucun point fixe : donnons pour exemple dans \mathbb{R} la fonction $f(x) = x^2 + 1$. Toutes les orbites s'en vont vers l'infini. A l'inverse, l'application *identité* définie par $\text{id}(x) = x$ admet tout point de \mathbb{R} comme point fixe.

1.1.3 Courbes invariantes

La dynamique d'une application peut souvent se révéler au moyen de courbes sur lesquelles se promènent les orbites.

Une *courbe* Γ de \mathcal{E} n'est bien définie que lorsqu'elle est paramétrée, c'est-à-dire l'image d'une application continue $\gamma : I \rightarrow \mathcal{E}$ où I est un intervalle de la droite réelle (éventuellement $I = \mathbb{R}$ ou \mathbb{R}^+). La variable t est le *paramètre*, la fonction γ la *paramétrisation*. Les extrémités d'une courbe sont les images des extrémités de I lorsque I est un intervalle borné. Sinon, on les définit par une limite : si par exemple $I = [0, +\infty)$, les extrémités de Γ sont $\gamma(0)$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$, si cette limite existe.

Pour qu'une orbite reste sur une courbe Γ , il faut que pour tout point de départ \mathbf{x} , l'image $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ soit encore dans Γ . Dans le voisinage d'un point fixe \mathbf{x}^* on appelle *courbe invariante* une courbe Γ , d'extrémité \mathbf{x}^* , telle que

$$\mathbf{f}(\Gamma) \subset \Gamma.$$

Dans les exemples de ce chapitre, les courbes invariantes recouvrent un voisinage de \mathbf{x}^* , mais elles sont toutes disjointes deux à deux, sauf en \mathbf{x}^* .

1.1.4 Dynamique d'une application linéaire

Commençons par reprendre quelques notions essentielles sur les applications linéaires en dimension finie. Cependant on ne peut tout rappeler, et on suppose connus les déterminants et les opérations élémentaires sur les matrices (addition, multiplication, inverse).

Prenons pour \mathcal{E} un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension $D \geq 1$. Une base canonique étant supposée fixée, dont les vecteurs ont pour composantes $(1, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, 0, 1)$, on identifie chaque élément \mathbf{x} de \mathcal{E} avec le vecteur

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_D \end{pmatrix}$$

de \mathbb{R}^D . L'écriture en colonne est une convention, mais si on préfère une écriture en ligne pour gagner de la place on utilise le vecteur *transposé*

$$X^t = (x_1, \dots, x_D).$$

Le vecteur nul $\mathbf{0}$ de \mathcal{E} correspond au vecteur 0 de \mathbb{R}^D , dont toutes les composantes sont nulles.

Pour définir une notion de convergence, il suffit de le faire sur \mathbb{R}^D . Soit une suite $\mathbf{x}^{(n)}$ de \mathcal{E} , et $\mathbf{x}^* \in \mathcal{E}$. Soit

$$X^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ \vdots \\ x_D^{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_D^* \end{pmatrix}$$

les vecteurs de \mathbb{R}^D associés. On dira que $\mathbf{x}^{(n)}$ converge vers \mathbf{x}^* si pour tout i , $x_i^{(n)}$ converge vers x_i^* : c'est une convergence *composantes par composantes*.

Norme vectorielle

On peut aussi utiliser le nombre réel suivant associé à \mathbf{x} , ou à X :

$$\|\mathbf{x}\| = \|X\| = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, D\}. \quad (1.1)$$

On dira, de façon équivalente, que la suite $\mathbf{x}^{(n)}$ converge vers \mathbf{x}^* si

$$\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^*\| \rightarrow 0.$$

Exercice 1.1 Vérifier que $\|X\|$ possède les trois propriétés fondamentales d'une norme :

1. $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0$;
2. Pour tout réel a ,

$$\|aX\| = |a|\|X\|.$$

3. Si X et Y sont deux vecteurs quelconques,

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

On en dira davantage sur les normes dans le chapitre 2.

Application linéaire

Une application, ou transformation $\mathbf{f} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est *linéaire* si elle respecte la structure d'espace vectoriel de \mathcal{E} , c'est-à-dire si pour tous vecteurs \mathbf{x} , \mathbf{y} et nombres réels α , β ,

$$\mathbf{f}(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

Une telle application est entièrement déterminée par une matrice A de taille $D \times D$, dont les colonnes correspondent aux images par \mathbf{f} des vecteurs de la base. Pour tout \mathbf{x} , l'image $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ est représentée par le produit AX .

L'application *identité* $\text{id}_{\mathcal{E}}$ est déterminée par $\text{id}_{\mathcal{E}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. La matrice correspondante s'écrit

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on change de base la matrice de \mathbf{f} change en général. Cependant, si A est l'ancienne matrice et B la nouvelle, A et B ont des caractéristiques communes. En fait il existe une matrice inversible P , la *matrice de changement de base*, telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Les colonnes de P sont les composantes des vecteurs de la nouvelle base, exprimés dans l'ancienne base. Deux matrices qui vérifient une relation du type ci-dessus sont dites *semblables*.

En dimension 1

Il n'y a qu'un seul type d'application linéaire $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: ce sont les fonctions $f(x) = ax$, où a est un paramètre réel. Pour tout n , $f^{o n}(x) = a^n x$.

L'application identité correspond à $a = 1$: toute valeur x est point fixe, toute orbite est constante. Si $a \neq 1$, il n'y a qu'un seul point fixe : c'est $x = 0$. Les orbites convergent vers 0 si $|a| < 1$, sinon elles divergent.

En dimension 2

Les exemples les plus fréquents correspondent à des transformations géométriques connues :

$$\begin{aligned} \text{Homothétie de rapport } \rho : \quad H_\rho &= \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \\ \text{Rotation d'angle } \theta : \quad R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ \text{Symétrie par rapport à } Ox \quad S_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les deux dernières matrices sont des cas particuliers de matrices *unitaires*. Une matrice unitaire est une matrice inversible telle que $A^{-1} = A^t$, et dont les colonnes forment par conséquent une famille orthonormale. Toute matrice unitaire 2×2 peut s'écrire R_θ ou $R_\theta \circ S_1$, donc appartient aux deux types suivants :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Le déterminant $\det(A)$ vaut ± 1 . La transformation correspondante a la propriété de conserver les distances. Elle conserve donc aussi les angles non orientés : elle ne déforme pas les objets.

Une **similitude** de rapport $\rho > 0$ correspond au produit d'une rotation, éventuellement d'une symétrie, et d'une homothétie. Sa matrice s'écrit donc ρA où A est unitaire. C'est une similitude directe si $\det(A) = 1$, indirecte si $\det(A) = -1$. Une similitude conserve les angles, mais ajoute un facteur de *contraction* (si $\rho < 1$) ou de *dilatation* (si $\rho > 1$).

Il existe bien entendu d'autres types de transformations. On verra (section 1.2) que toute matrice 2×2 réelle est semblable à une matrice de l'une des formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & h \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

où tous les paramètres sont réels. On retrouve la forme ρR_θ dans celle de droite.

Structure d'une application linéaire

On dit que λ est *valeur propre* de A s'il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Un tel vecteur X est un λ -*vecteur propre* de A . L'ensemble des λ -vecteurs propres, auquel on adjoint le vecteur 0 , est le λ -*espace propre*. C'est l'ensemble des vecteurs solutions de l'équation

$$(A - \lambda I)X = 0.$$

Toute valeur propre est racine du polynôme caractéristique

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

où \det désigne le déterminant. Comme il est de degré D , il y a D valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_D$, distinctes ou non, réelles ou complexes. Si λ est complexe, les vecteurs propres ont des composantes complexes.

La *multiplicité* de λ_i est le plus grand n tel que $\varphi_A(\lambda)$ soit divisible par $(\lambda - \lambda_i)^n$. La valeur propre est *simple* si sa multiplicité est 1.

Diagonalisation

Dans le cas où les valeurs propres sont toutes réelles, A est diagonalisable s'il existe une famille de D vecteurs propres indépendants sur \mathbb{R} , donc constituant une base de \mathbb{R}^D . Ces D colonnes forment une matrice $P = (X_1, \dots, X_D)$. Si

$$D_{\text{iag}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \lambda_D \end{pmatrix}$$

est la matrice des valeurs propres correspondante, alors

$$P^{-1}AP = D_{\text{iag}}.$$

Cela signifie que dans la base définie par les vecteurs propres, l'application linéaire \mathbf{f} a une structure très simple : pour chaque valeur de i elle se réduit à une homothétie de rapport λ_i sur le i -ème axe.

Dans le cas où il y a des valeurs propres complexes, il est plus simple de considérer \mathcal{E} comme un espace vectoriel de dimension D sur \mathbb{C} , donc identifié à \mathbb{C}^D . La même équation de diagonalisation $P^{-1}AP = D_{\text{iag}}$ reste vraie si l'on peut trouver une matrice complexe, inversible, dont les colonnes sont des vecteurs propres. On rappelle les notations habituelles : $\bar{\lambda}$ pour le complexe conjugué de λ et $|\lambda| = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}}$ pour son module.

Si l'une des valeurs propres de A a une multiplicité strictement supérieure à la dimension de l'espace propre associé, A n'est pas diagonalisable : il est impossible de trouver une base de \mathcal{E} composée de vecteurs propres.

Rayon spectral

Le paramètre

$$\lambda(A) = \max |\lambda_i|$$

est le *rayon spectral*. Il joue un rôle important dans la dynamique d'une matrice. Mais il faut noter que ce paramètre caractérise \mathbf{f} aussi bien que sa matrice représentative A . En effet, si A et B sont semblables, on vérifie assez aisément que $\varphi_A(\lambda) = \varphi_B(\lambda)$. L'ensemble des valeurs propres restant le même, on a bien $\lambda(A) = \lambda(B)$. On pourra donc aussi noter $\lambda(\mathbf{f})$ le rayon spectral.

Matrice symétrique

Une matrice symétrique A est égale à sa transposée A^t . Dans ce cas particulier, on peut montrer qu'elle est diagonalisable, et que

- (i) toutes les valeurs propres sont réelles ;
- (ii) deux vecteurs propres X_i, X_j correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux, au sens du produit scalaire dans \mathbb{R}^D : $X_i^t X_j = 0$.

On déduit de ces propriétés qu'il est possible de trouver une base *orthonormale* de vecteurs propres, autrement dit une matrice de changement de base P qui est unitaire. L'équation de diagonalisation s'écrit

$$P^t A P = D_{\text{diag}}.$$

Exercice 1.2 On étudiera plus loin la dynamique des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.15 \\ 0.1 & 0.45 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.23 & 0.36 \\ -0.64 & 0.27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.15 & -0.4 \\ 0.2 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

Calculer leurs valeurs propres dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Montrer que la première et la troisième sont diagonalisables (trouver P telle que $P^{-1} A P$ est diagonale), et que la deuxième ne l'est pas.

Exercice 1.3 L'équation du cercle unité C dans \mathbb{R}^2 est $X^t X = 1$. Soit A une matrice 2×2 de déterminant non nul. On veut tracer l'ellipse Γ , image de C par A .

- a) Soit $B = (A A^t)^{-1}$. Montrer que l'équation de Γ est $X^t B X = 1$.
- b) Soit λ_1, λ_2 les valeurs propres de $A A^t$. Montrer qu'elles sont non nulles, et qu'il existe une matrice unitaire P telle que

$$P^t B P = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

- c) Montrer que l'équation de Γ dans la nouvelle base déterminée par P est

$$\frac{z_1^2}{\lambda_1} + \frac{z_2^2}{\lambda_2} = 1.$$

d) Application : soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer l'équation de Γ , trouver la direction de ses axes et tracer l'ellipse.

Point fixe Un point fixe (vecteur colonne) de A correspond à un point fixe (vecteur) de la transformation linéaire associée. C'est donc une colonne X^* telle que

$$A X^* = X^*,$$

ou encore

$$(A - I)X^* = 0.$$

Le vecteur 0 est toujours point fixe.

Exercice 1.4 Vérifier que 0 est le seul point fixe si 1 n'est pas valeur propre de A . Lorsque A a une valeur propre égale à 1 il existe au contraire une infinité de points fixes.

Théorème 1.1 Soit f une application linéaire, de matrice A dans une base donnée. Toutes les orbites de f convergent vers 0 $\Leftrightarrow \lambda(A) < 1$.

Démonstration. On va utiliser les notations matricielles A et X associées à f et x . On ne va étudier ici que le cas, très simple, où A est diagonalisable.

\Rightarrow Supposons que $\lambda(A) \geq 1$. Appelons λ_1 une valeur propre (réelle ou complexe) telle que $|\lambda_1| = \lambda(A)$ (le rayon spectral), et U_1 un λ_1 -vecteur propre. On a $A U_1 = \lambda_1 U_1$, donc $A^n U_1 = \lambda_1^n U_1$, et $\|A^n U_1\| = |\lambda_1^n| \|U_1\| \geq \|U_1\|$. Cela prouve que $A^n U_1$ ne tend pas vers 0 . Donc si toutes les orbites de f convergent vers 0 , nécessairement $\lambda(A) < 1$.

\Leftarrow Il suffit de démontrer que si $\lambda(A) < 1$, la suite des matrices A^n tend vers la matrice 0 . Soit une matrice inversible P telle que $P^{-1} A P$ est égale à la matrice diagonale D_{diag} . Pour tout n , $P^{-1} A^n P = D_{\text{diag}}^n$. La matrice D_{diag}^n est aussi diagonale, et les éléments de sa diagonale sont du type λ_i^n , où λ_i est valeur propre de A . Comme $|\lambda_i| < 1$ la matrice D_{diag}^n tend vers 0 . Donc aussi A^n . \square

Si A n'est pas diagonalisable, on arrive à la même conclusion en utilisant la *forme réduite de Jordan* de A . Nous ne donnons pas le détail, un peu technique.

Remarque Supposons A diagonalisable, de valeurs propres λ_i avec $\lambda(A) = |\lambda_1|$, et de vecteurs propres correspondants U_i . Soit un vecteur X_0 . Dans la base des vecteurs propres, il s'écrit sous la forme

$$X_0 = a_1 U_1 + \dots + a_D U_D.$$

Supposons que $|\lambda_i| < |\lambda_1|$ pour tout $i \geq 2$, et $a_1 \neq 0$. Comme

$$\begin{aligned} A^n X_0 &= a_1 \lambda_1^n U_1 + \dots + a_D \lambda_D^n U_D \\ &= \lambda(A)^n \left[a_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda(A)} \right)^n U_1 + \dots + a_D \left(\frac{\lambda_D}{\lambda(A)} \right)^n U_D \right], \end{aligned}$$

on obtient

$$\frac{1}{\lambda(A)^n} A^n X_0 \longrightarrow a_1 U_1.$$

Si on normalise, à chaque itération, le vecteur $A^n X_0$:

$$\frac{1}{\|A^n X_0\|} A^n X_0 = \frac{A^n X_0 / \lambda(A)^n}{\|A^n X_0 / \lambda(A)^n\|} \rightarrow \frac{a_1 U_1}{\|a_1 U_1\|} = \frac{U_1}{\|U_1\|}.$$

La direction de $A^n X_0$ tend vers celle de U_1 , le vecteur propre associée au rayon spectral.

Exercice 1.5 *Montrer que la matrice*

$$\begin{pmatrix} \lambda & h \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable si $h \neq 0$. Vérifier cependant que le théorème 1.1 reste vrai, c'est-à-dire que si $|\lambda| < 1$, alors $A^n \rightarrow 0$.

1.2 Orbites d'une application linéaire dans le plan

L'application linéaire \mathbf{f} est associée à la matrice A de taille 2×2 , de valeurs propres λ_1, λ_2 . On suppose que $|\lambda_1| = \lambda(A) < 1$.

1.2.1 Valeurs propres réelles et distinctes

Soit $P = (U_1, U_2)$ la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres pour les valeurs propres λ_1, λ_2 . Un point de coordonnées X dans la base originale a pour coordonnées Y dans la base des vecteurs propres, avec $X = PY$. Dans cette dernière base la matrice de \mathbf{f} est $P^{-1} A P = D_{\text{diag}}$, où

$$D_{\text{diag}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Partant de $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = P Y_0$ avec $Y_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ on calcule les itérées successives

$$X_n = A^n X_0 = P D_{\text{diag}}^n P^{-1} X_0 = P Y_n,$$

où

$$Y_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n u_0 \\ \lambda_2^n v_0 \end{pmatrix}.$$

La suite (Y_n) définit les points de l'orbite dans la nouvelle base. On peut distinguer plusieurs cas :

a) $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$:

Il est plus commode de calculer l'orbite dans la base des vecteurs propres. Les points $(\lambda_1^n u_0, \lambda_2^n v_0)$ sont situés sur la courbe paramétrée

$$\Gamma_{(u_0, v_0)} : \begin{cases} u(t) = \lambda_1^t u_0 \\ v(t) = \lambda_2^t v_0 \end{cases} \quad t \geq 0.$$

Si \mathbf{x} est un point quelconque de $\Gamma_{(u_0, v_0)}$, il existe une valeur t telle que les coordonnées de \mathbf{x} sont $(u(t), v(t))$ dans la nouvelle base. Le point $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ a pour coordonnées

$$D_{\text{diag}} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t+1) \\ v(t+1) \end{pmatrix} :$$

C'est encore un point de $\Gamma_{(u_0, v_0)}$. On en déduit que cette courbe est invariante dans le sens donné page 5. Son équation cartésienne s'écrit

$$v = v_0 \left| \frac{u}{u_0} \right|^\alpha$$

avec $\alpha = \log \lambda_2 / \log \lambda_1$. Comme α est plus grand que 1, la courbe est tangente à l'axe $0u$ à l'origine. A l'infini, la direction asymptotique est l'axe $0v$.

En revenant aux anciennes coordonnées, l'orbite (X_n) est située sur une courbe qui est une transformée linéaire de $\Gamma_{(u_0, v_0)}$: elle tend vers 0, où elle est tangente au vecteur U_1 (direction propre associée au rayon spectral). Sa direction asymptotique est U_2 .

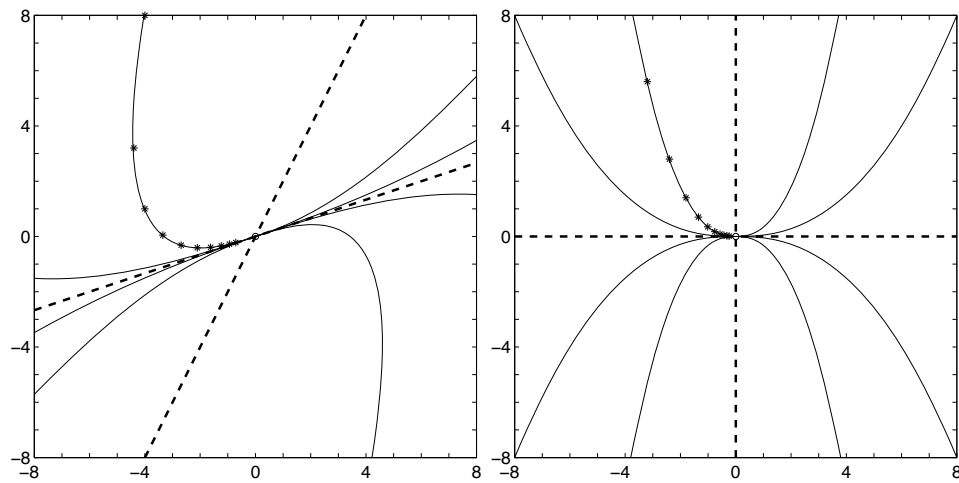


FIG. 1.1 – A gauche, orbite et courbes invariantes de la matrice $\begin{pmatrix} 0.8 & -0.15 \\ 0.1 & 0.45 \end{pmatrix}$ (voir l'exercice 1.2 pour une étude spectrale). Les directions propres donnent la pente de la tangente en 0 et la direction asymptotique. A droite, même figure dans la base des vecteurs propres.

b) $0 = \lambda_2 < \lambda_1 < 1$:

C'est un cas limite du précédent. La matrice A est le produit par λ_1 d'une matrice de projection sur U_1 , parallèlement à U_2 . Après la première itération, les orbites sont toutes sur la droite passant par 0 et de direction U_1 . La seule courbe invariante est la droite passant par l'origine, de direction U_1 .

c) $-1 < \lambda_2 \leq 0 \leq |\lambda_2| < \lambda_1 < 1$:

Selon la parité de l'entier n , la suite (Y_n) est située sur l'une ou l'autre des deux orbites de la matrice $\begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & |\lambda_2| \end{pmatrix}$ passant par

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} u_0 \\ -v_0 \end{pmatrix}.$$

Une courbe invariante est donc la réunion de deux courbes invariantes symétriques du 1er cas.

d) Autres cas :

Ce sont ceux où $\lambda_1 < 0$. Ils se déduisent des cas précédents. Le tracé des courbes reste le même.

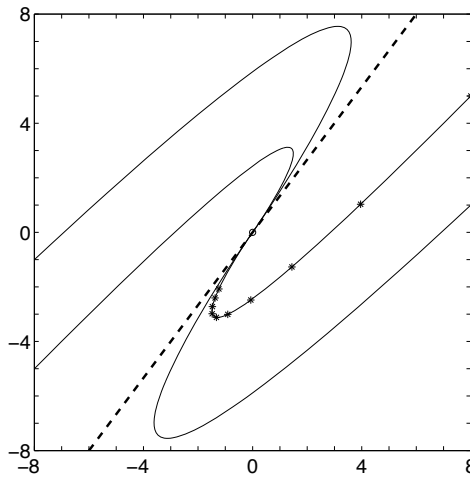


FIG. 1.2 – Orbites de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1.23 & 0.36 \\ -0.64 & 0.27 \end{pmatrix}$ (voir l'exercice 1.2 pour une étude spectrale). L'unique direction propre donne à la fois la pente de la tangente à l'origine et la direction asymptotique.