

Table des matières

Introduction	ix
I Orbites et systèmes itérés	1
1 Orbites et points fixes	3
1.1 Dynamique d'une fonction	3
1.1.1 Orbites	3
1.1.2 Point fixe	4
1.1.3 Courbes invariantes	5
1.1.4 Dynamique d'une application linéaire	5
1.2 Orbites d'une application linéaire dans le plan	11
1.2.1 Valeurs propres réelles et distinctes	11
1.2.2 Valeur propre double	14
1.2.3 Valeurs propres complexes conjuguées	15
1.3 Dynamiques associées aux applications linéaires	17
1.3.1 Applications affines	17
1.3.2 Linéarisation au voisinage d'un point fixe	18
1.3.3 Fonctions holomorphes	22
2 Topologie métrique	31
2.1 Distance	31
2.1.1 Caractérisation topologique d'un ensemble	32
2.1.2 Continuité	34
2.1.3 Espaces complets	34
2.1.4 Applications contractantes	36
2.2 Normes et convexité	37
2.2.1 Norme	37
2.2.2 Normes de \mathbb{R}^D	39
2.3 Applications contractantes	43
2.3.1 Applications affines contractantes	43
2.3.2 Norme propre d'une application affine	45
2.3.3 Cas de la norme euclidienne	48
2.3.4 Applications compatibles	49
2.3.5 Applications localement contractantes	50

3	Attracteur d'un système d'applications	55
3.1	Distance de Hausdorff	55
3.1.1	Saucisse de Minkowski	55
3.1.2	Distance associée	57
3.1.3	L'espace métrique $\mathcal{H}(\mathbb{R}^D)$ est complet	60
3.2	Orbites dans l'espace des ensembles compacts	61
3.2.1	L'attracteur, vu comme un point fixe	61
3.2.2	Les applications qui contractent $\mathcal{H}(\mathbb{R}^D)$	62
3.2.3	Applications contractantes stables	67
3.3	Dynamique d'un SFI	69
3.3.1	Construction d'un attracteur	69
3.3.2	Adresse d'un point de \mathcal{A}	71
3.3.3	Compatibilité des applications	72
3.3.4	Condition de l'ensemble ouvert	72
4	Géométrie des attracteurs	77
4.1	Quelques propriétés topologiques	77
4.1.1	Connexité	77
4.1.2	Connexité d'un attracteur de SFI	78
4.1.3	Intérieur d'un attracteur	82
4.2	Attracteurs dans \mathbb{R}	83
4.2.1	Ensembles parfaits symétriques	83
4.2.2	Auto-similarité	84
4.3	Attracteurs dans \mathbb{R}^2	87
4.3.1	Auto-similarité	87
4.3.2	Auto-affinité	94
4.3.3	Dynamique non linéaire	100
4.4	Attracteurs dans \mathbb{R}^D	101
4.4.1	Surfaces rugueuses	102
4.4.2	Volumes poreux	103
4.4.3	Dimension de similitude	103
II	Dimension de Minkowski-Bouligand	107
5	Recouvrements par boules et boîtes	109
5.1	Voisinages d'un ensemble	109
5.1.1	Saucisse de Minkowski	109
5.1.2	Dimensions fractales	112
5.2	Propriétés et définitions équivalentes	112
5.2.1	Propriétés	112
5.2.2	Suites discrètes	114
5.2.3	Méthode des boîtes	114
5.3	Dimension d'ensembles particuliers	116
5.3.1	Ensembles discrets	116

5.3.2	Courbes localement rectifiables	116
5.3.3	Ensembles auto-similaires	120
5.3.4	Arbres dyadiques	122
5.3.5	Graphes de fonctions continues	124
6	Pavage du complémentaire	133
6.1	Sur la droite	134
6.1.1	Exposants de convergence	134
6.1.2	Relation avec la dimension	136
6.1.3	Applications	137
6.2	Dans le plan	140
6.2.1	Pavages auto-similaires	140
6.2.2	Empilement apollonien	141
6.2.3	Pavage de Whitney	148
6.2.4	Empilement par des ensembles convexes	150
6.3	Dimension extérieure	153
6.3.1	Ensemble résiduel d'aire non nulle	153
6.3.2	Dimensions latérales d'une courbe plane	154
III	Mesures et dimensions d'ensembles	157
7	Mesures en général	159
7.1	Mesures d'ensembles	159
7.1.1	Tribu borélienne	159
7.1.2	Mesure de Borel	161
7.1.3	Support, et ensemble portant la mesure	163
7.2	Mesures finies à support compact	165
7.2.1	Intégrale par rapport à une mesure	165
7.2.2	Distance entre deux mesures	169
7.2.3	Convergence faible	171
7.3	Mesures et réseaux	174
7.3.1	Réseaux	174
7.3.2	Réseau discret	176
7.3.3	Fonction additive sur un réseau discret	177
7.3.4	Extension à une mesure de Borel	179
7.4	Quelques mesures bien connues	180
7.4.1	Mesures sur la droite	180
7.4.2	Mesures dans le plan	185
7.4.3	Mesure associée à un système de similitudes	188
7.5	Mesures extérieures	193
7.5.1	La σ -sous-additivité	194
7.5.2	Mesure métrique	195

8	Mesures et dimension de Hausdorff	201
8.1	Mesures de recouvrement	201
8.1.1	Longueur, aire, volume	201
8.1.2	ϕ -mesure	203
8.1.3	Echelle de fonction	204
8.1.4	Relation avec la mesure de Lebesgue	206
8.2	Recouvrements pris dans un réseau	208
8.2.1	Réseau des intervalles dyadiques semi-ouverts	208
8.2.2	Réseaux admissibles pour la mesure de Hausdorff	210
8.2.3	Un réseau admissible particulier, le H-réseau	211
8.2.4	H-réseau discret	212
8.2.5	Théorème de densité pour la mesure H^α	214
8.3	Dimension de recouvrement	219
8.3.1	Valeur de coupure	219
8.3.2	Exposants de Hölder d'une mesure dans un H-réseau	221
8.3.3	Application à divers réseaux	223
8.3.4	Dimension des ensembles normaux	226
8.3.5	Dimension de Hausdorff et dimension de boîtes	228
8.4	Mesures associées à un réseau universel	229
8.4.1	Réseau universel	229
8.4.2	Construction d'une mesure	230
8.4.3	Recouvrements par boules centrées	231
8.4.4	Théorème de densité pour la mesure c^α	233
9	σ-Stabilité et empilements	235
9.1	Réseaux et dimension de boîtes	235
9.1.1	Le P-réseau, admissible pour la dimension Δ	235
9.1.2	Une expression générale de Δ	236
9.1.3	Dimension Δ et empilements	237
9.2	Comment localiser et σ -stabiliser une dimension	239
9.2.1	L'opération « chapeau »	239
9.2.2	Dimension locale	240
9.2.3	Application à la dimension de boîtes	243
9.3	Exposants d'une mesure dans un P-réseau	244
9.3.1	Relations avec la dimension Δ	245
9.3.2	Relations avec la dimension $\hat{\Delta}$	247
9.4	Mesures et dimension d'empilements	248
9.4.1	Pré-mesures	248
9.4.2	Mesures d'empilements	250
9.4.3	Dimension d'empilements	250
9.4.4	Théorème de densité pour la mesure $p^\alpha(E)$	251
9.4.5	Relation avec la mesure de recouvrement	253
9.4.6	Relation avec la mesure de Lebesgue	254

10 Ensembles réguliers et irréguliers	257
10.1 Ensembles 1-rectifiables	257
10.1.1 Le théorème de densité de Lebesgue	257
10.1.2 Courbes rectifiables	258
10.1.3 Notion de régularité en dimension 1	262
10.2 Densités locales de mesures	267
10.2.1 Densités des mesures de recouvrement et d'empilement	267
10.2.2 Mesures et densités d'ensembles rectifiables	269
10.2.3 Densités dans un ensemble auto-similaire	271
10.2.4 Application à l'ensemble de Cantor	276
10.3 Mesures d'un produit cartésien	280
10.3.1 Produits cartésiens	281
10.3.2 Inégalités sur les pré-mesures	283
10.3.3 Densités de mesures produit	284
10.4 Dimensions d'un produit cartésien	287
10.4.1 Encadrement de $\dim(A \times B)$	288
10.4.2 Encadrement de $\text{Dim}(A \times B)$	289
IV Analyse fractale des mesures	293
11 Mesures et fonctions	295
11.1 Projections et similitudes	295
11.1.1 Image d'une mesure	295
11.1.2 La mesure de Besicovitch est auto-similaire	297
11.1.3 Relèvements de la mesure de Lebesgue	299
11.1.4 Exemples de relèvements	299
11.2 Attracteur de mesures	303
11.2.1 Opérateur associé à une application continue	303
11.2.2 Opérateur associé à une application contractante	303
11.2.3 Opérateur associé à un système de fonctions itéré	304
11.2.4 Théorème du point fixe dans $\mathcal{M}_1(K)$	305
11.3 Orbites aléatoires	306
11.3.1 Le « jeu du chaos » dans un SFI	306
11.3.2 Ensemble des points limite	307
11.3.3 Fréquence de visites et mesure invariante	309
11.4 Ergodicité de la mesure invariante	310
11.4.1 L'espace des orbites	311
11.4.2 Quelques notions de théorie ergodique	313
11.4.3 Le décalage de Bernouilli	314
11.4.4 Application du théorème ergodique	315

12 Dimensions et analyse d'une mesure	319
12.1 Mesure de Besicovitch : dimension et spectre	319
12.1.1 Dimension de m_p	320
12.1.2 Spectre de dimension	321
12.1.3 Spectre des grandes déviations	322
12.1.4 Spectre de Legendre	324
12.1.5 Conclusion	327
12.2 Les dimensions d'une mesure finie	329
12.2.1 Bornes essentielles	329
12.2.2 Les dimensions \dim_* , \dim^* , Dim_* , Dim^*	331
12.3 Analyse multifractale d'une mesure	333
12.4 Spectre de dimension	333
12.4.1 Ensembles de points d'exposant de Hölder donné	333
12.4.2 Propriétés	334
12.4.3 Spectre utilisant la dimension de boîtes	335
12.5 Spectre des grandes déviations	336
12.5.1 Les spectres $S_g(\alpha)$ et $S_g(\alpha, \varepsilon)$, version continue	337
12.5.2 Propriétés du spectre S_g	340
12.6 Moments d'ordre q et spectre de Legendre	342
12.6.1 Fonction τ , version continue	342
12.6.2 Transformée de Legendre de τ	347
V Annexes	349
13 Quelques lemmes utiles	351
13.1 Ordre de croissance des fonctions	351
13.1.1 Fonctions équivalentes	351
13.1.2 Limites inférieure et supérieure	351
13.1.3 Application à la dimension de Minkowski-Bouligand	354
13.1.4 Exposant de convergence d'une série	354
13.2 Lemmes de recouvrement	356
13.2.1 Nombre d'intersections	357
13.2.2 Réseaux et lemme de Vitali	358
13.2.3 Lemme de Besicovitch	361
13.2.4 Recouvrement essentiel	362
13.3 Lemme de Frostman	363
13.3.1 Résultat fondamental	363
13.3.2 Corollaires	365
13.4 Lemme de Borel-Cantelli	366
13.5 Transformée de Legendre	369
13.5.1 Concavité	369
13.5.2 Définition de $\mathcal{L}(f)$	371
13.5.3 Fonction bornée définie sur un ensemble borné	373
13.5.4 Double transformée de Legendre	375

14 Solutions des exercices	379
14.1 Chapitre 1	379
14.2 Chapitre 2	382
14.3 Chapitre 3	385
14.4 Chapitre 4	387
14.5 Chapitre 5	394
14.6 Chapitre 6	398
14.7 Chapitre 7	401
14.8 Chapitre 8	406
14.9 Chapitre 9	412
14.10Chapitre 10	416
14.11Chapitre 11	420
14.12Chapitre 12	425
14.13Chapitre 13	429
 Bibliographie	 433
 Table des notations	 435
 Index	 437