Chapitre 1

Raisonnement par récurrence

1.1 Cours en bref

Le raisonnement par récurrence est une méthode de résolution. Elle permet de démontrer une propriété pour tout ou presque tout entier naturel. La question de son utilisation se pose donc naturellement lorsqu'il est demandé de démontrer qu'une certaine propriété est vraie quel que soit n entier naturel.

Cependant, il ne faut pas croire que dès que ce type de question est posé, il s'agira alors d'une récurrence. Il existe quelques signes qui permettent de nous mettre sur la voie. Mais avant cela voyons en quoi consiste le raisonnement par récurrence.

L'idée est en fait assez simple. Elle repose sur 2 étapes :

(1) démontrer que la propriété est vraie pour un certain rang n_0 (qui est souvent 0 ou 1)

et

(2) démontrer que **si** la propriété est vraie pour un rang $n \geq n_0$ quelconque **alors** elle l'est pour le rang $n+1$ (c'est-à-dire le rang juste après).

Une fois ces 2 étapes franchies on peut affirmer que la propriété est vraie pour tous les rangs supérieurs à n_0. En effet, (1) nous dit que la propriété est vraie pour le rang n_0, (2) nous permet alors de dire qu'elle l'est pour le rang $n_0 + 1$, on réutilise (2) pour obtenir le rang $n_0 + 2$ et ainsi de suite, on obtient tous les rang supérieurs. Ce qui permet de montrer l'hérédité est l'utilisation du lien entre le rang n et le rang $n + 1$, on y reviendra dans les exemples donnés car c'est l'idée centrale.

L'étape (1) est appelée **initialisation** et l'étape (2) **hérédité**.

1.2 Premier exemple

La réussite d'un raisonnement par récurrence passe par la rédaction. Une récurrence mal rédigée donne une très mauvaise impression au correcteur. Il faut donc respecter scrupuleusement le modèle donné.

Exemple :

On considère la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n - 2 \end{cases}$

Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \frac{1}{2}(5^n + 1)$.

Solution :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n : u_n = \frac{1}{2}(5^n + 1)$.

(1) **Initialisation :** Montrons que $H_0 : u_0 = \frac{1}{2}(5^0 + 1)$ est vraie.

D'une part, $u_0 = 1$ par définition,
et d'autre part, $\frac{1}{2}(5^0 + 1) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$.
On a donc bien $u_0 = \frac{1}{2}(5^0 + 1)$, donc H_0 est vraie.

(2) **Hérédité** : Supposons que H_n est vraie pour un certain rang $n \geq 0$ (c'est ce que l'on appelle l'hypothèse de récurrence). Montrons alors que $H_{n+1} : u_{n+1} = \frac{1}{2}(5^{n+1} + 1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 5u_n - 2 \\
&= 5 \times \frac{1}{2}(5^n + 1) - 2 && \text{par définition} \\
&= \frac{5^{n+1}}{2} + \frac{5}{2} - 2 && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{5^{n+1}}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(5^{n+1} + 1) && \text{en factorisant par } \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi H_{n+1} est vraie. Par le principe du raisonnement par récurrence, H_n est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Détaillons un peu...

On peut légitimement se diriger vers un raisonnement par récurrence dans ce type d'exercice puisqu'il porte sur une suite définie par récurrence. On dit souvent que la récurrence appelle la récurrence...

Il faut toujours écrire H_{n_0} dans l'initialisation et H_{n+1} dans l'hérédité. Cela permet de voir ce que l'on doit démontrer. Dans un cas comme dans l'autre il s'agit d'une égalité à démontrer. On utilise pourtant 2 méthodes différentes. Dans l'initialisation on calcule chacun des 2 membres ***séparément*** pour trouver le même résultat, ils sont donc égaux. Dans l'hérédité, on part de u_{n+1} que l'on manipule pour obtenir le résultat voulu.

La justification "par hypothèse de récurrence" doit ***toujours*** apparaitre, sinon il y a 3 possibilités :

- c'est un oubli,
- il y a une erreur dans le raisonnement,
- le raisonnement par récurrence n'était pas nécessaire.

Il faut bien comprendre que la partie difficile est souvent la partie hérédité. Ce qui permet de montrer l'hérédité est le lien entre le rang n et le rang $n+1$ ainsi qu'une bonne utilisation de l'hypothèse de récurrence. La première chose à repérer étant ce lien, et ici il apparait clairement dans la définition de la suite.

1.3 D'autres exemples classiques

1.3.1 Avec une somme

Exercice :

Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

C'est un exercice classique faisant intervenir le symbole somme. La méthode pour trouver le lien entre le rang n et le rang $n+1$ est assez simple puisqu'il va suffire de couper la somme en 2.

Correction :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose H_n : $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(1) **Initialisation :** Montrons que H_0 : $\sum\limits_{k=0}^{0} k = \dfrac{0(0+1)}{2}$ est vraie.

D'une part, $\sum\limits_{k=0}^{0} k = 0$.

D'autre part, $\dfrac{0(0+1)}{2} = 0$.

Donc $\sum\limits_{k=0}^{0} k = \dfrac{0(0+1)}{2}$ et H_0 est vraie.

(2) **Hérédité :** Supposons que H_n est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. Montrons alors que H_{n+1} : $\sum\limits_{k=0}^{n+1} k = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ est vraie.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k &= \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) && \text{on découpe notre somme en deux} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} && \text{mise au même dénominateur} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && \text{en factorisant par } \frac{(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi H_{n+1} est vraie. Par le principe du raisonnement par récurrence, H_n est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

1.3.2 Avec une suite

Exercice :

On définit la suite suivante pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$,

ainsi que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Correction :

Dans un premier temps, on remarque que la fonction f n'est pas là par hasard. En effet $f(u_n) = \frac{1}{2}u_n + 2 = u_{n+1}$. C'est donc cette fonction qui est le lien entre le rang n et le rang $n+1$, elle nous aidera donc à passer l'hérédité.

1. En première, une méthode efficace pour déterminer les variations d'une fonction est le calcul de la fonction dérivée, puis l'étude de son signe. Ici on peut faire encore plus rapide, puisque la fonction f est une fonction affine dont le coefficient directeur $\frac{1}{2}$ est positif. Rappelons que les fonctions affines sont représentées graphiquement par une droite et que cette fonction affine sera donc croissante sur $\mathbb{R}$.
   f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
2. La méthode qu'il ne faut jamais oublier lorsque l'on pose cette question, repose directement sur la définition ; c'est montrer que $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ ce qui revient parfois à montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 0$. C'est la seule qui ne nécessite aucune condition particulière, et toujours la première à vérifier. La récurrence appelant la récurrence....

   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose : $H_n : u_{n+1} \geq u_n$.

   (1) **Initialisation :** Montrons que $H_0 : u_1 \geq u_0$ est vraie.

   D'une part, $u_0 = 0$, par définition.
   D'autre, $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 2 = 2$.
   Donc on a bien $u_1 \geq u_0$ et H_0 est vraie.

   (2) **Hérédité :** Supposons que H_n est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. Montrons alors que $H_{n+1} : u_{n+2} \geq u_{n+1}$ est vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\geq u_n && \text{par hypothèse de récurrence} \\ \Rightarrow f(u_{n+1}) &\geq f(u_n) && \text{car la fonction } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

   or $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$, on a alors : $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

   Donc H_{n+1} est vraie. Par le principe du raisonnement par récurrence, H_n est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (u_n) est croissante.

   Détaillons un peu ...

Pour l'initialisation, rien de particulier, on calcule u_1 et u_0, on compare, tout se passe bien.
Pour l'hérédité, cette fois on commence par exposer l'hypothèse de récurrence. C'est ce que l'on fera toujours ou presque dans ce type d'exercice. On applique ensuite la fonction f qui est le lien entre le rang n et le rang $n+1$ et donc a fortiori entre le rang $n+1$ et le rang $n+2$. Il est bon de rappeler que lorsque l'on applique une fonction sur une inégalité, il faut maitriser, non pas le signe, mais les variations de la fonction appliquée. Ici, f est croissante sur $\mathbb{R}$, elle conserve donc le sens de l'inégalité, là où une fonction décroissante l'aurait renversé.

1.3.3 En arithmétique

Exercice :
Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Remarque : Il faut dans un premier temps dire que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 signifie qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3^{2n} - 2^n = 7k$.

Correction

(1) **Initialisation :** Montrons que H_0 : $3^{2\times 0} - 2^0$ est divisible par 7, est vraie.

$3^{2\times 0} - 2^0 = 3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = 7 \times 0$.
Donc H_0 est vraie.

(2) **Hérédité :** Supposons que H_n est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. Montrons alors que H_{n+1} : $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est divisible par 7, est vraie.

Si l'on suppose que H_n est vraie, alors il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3^{2n} - 2^n = 7k$.
Le but est de réussir à écrire $3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 7k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 3^{2n+2} - 2 \times 2^n \\ &= 3^2 \times 3^{2n} - 2 \times 2^n \\ &= 9 \times 3^{2n} - 2 \times 2^n \end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $3^{2n} - 2^n = 7k \Leftrightarrow 3^{2n} = 2^n + 7k$.

On a alors,

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 9 \times (2^n + 7k) - 2 \times 2^n \\ &= 9 \times 2^n + 9 \times 7k - 2 \times 2^n \\ &= 7 \times 2^n + 7 \times 9k \\ &= 7(2^n + 9k) \end{aligned}$$

Donc $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est divisible par 7 et H_{n+1} est vraie. Par le principe du raisonnement par récurrence, H_n est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

1.4 Idées importantes

- Le raisonnement par récurrence ne s'applique que sur des questions du type « montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$... » jamais sur $\mathbb{R}$.
- La rédaction doit toujours respecter le modèle donné.
- L'hérédité se montre en trouvant le lien entre le rang n et le rang $n+1$.
- L'hypothèse de récurrence doit toujours apparaitre dans l'hérédité mais pas toujours au même moment.
- Une somme se découpe facilement en 2.
- Si la suite peut être vue comme $u_{n+1} = f(u_n)$, alors les variations de f peuvent aider à montrer l'hérédité.
- En arithmétique, l'hérédité se montre souvent avec des calculs un peu techniques.

Chapitre 2

Dérivabilité

2.1 Cours en bref

Ce qu'il y a de nouveau en terminale par rapport à la classe de première S tient surtout à 2 formules de dérivation ainsi qu'à la notion de continuité avec laquelle est associée un nouveau théorème, celui des valeurs intermédiaires. Avant de rappeler ces 2 formules, pointons les choses essentielles à bien avoir comprises pour aborder ce chapitre.

Si l'on pose la question :"qu'est-ce qu'une dérivée ?" à un élève, la réponse sera très souvent :
"c'est f' ". Ce qui n'est évidemment pas la réponse à donner. Ce qui suit est très important !
Si l'on considère une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et dérivable en un réel $a \in I$, alors $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a. On connait même une équation de cette tangente depuis la classe de première S.

$$\boxed{T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Cette formule est à connaitre absolument puisqu'elle est régulièrement demandée dans les sujets de Bac.

Illustrons ce que cela donne graphiquement.