Chapitre 1

Généralités

Présentation de l'ouvrage

Cet ouvrage reprend toutes les notions mathématiques nécessaires pour le concours de recrutement de professeurs des écoles.

Dans son deuxième chapitre, il propose sept problèmes variés, révélateurs selon nous de l'esprit dans lequel il faut travailler les mathématiques du concours. Ces problèmes sont élémentaires puisqu'ils exigent très peu de connaissances, mais ils sont difficiles. Dans ce chapitre, ce sont plutôt les attitudes et les méthodes (dans un sens très large) propres aux mathématiques élémentaires qui sont travaillées. Nous conseillons de consacrer à ce chapitre un temps suffisant pour effectuer une vraie recherche personnelle de chaque problème et pour s'approprier les conseils donnés.

La suite de l'ouvrage est organisée de façon plus traditionnelle autour de quelques grands sujets : les nombres, la géométrie, les grandeurs, les outils numériques… Chaque chapitre comporte les informations nécessaires et des exercices corrigés de façon détaillée. Pour de nombreux exercices, des indications pour aider à démarrer sont également fournies. Il n'y a pas d'ordre impératif dans lequel travailler ces chapitres.

Nous ne séparons pas l'entrainement à la première partie de l'épreuve de celui à la deuxième partie. En effet, le terme « problème » qui désigne la première partie signifie simplement que les questions successives portent sur un même thème, le lien pouvant être assez artificiel. Pour le candidat, la façon de traiter les différentes questions du problème ou les exercices indépendants de la deuxième partie est exactement la même.

Le 18$^{\text{e}}$ et dernier chapitre comporte cinq sujets de concours entièrement corrigés.

Juste avant les sujets corrigés, le chapitre 17 propose des exercices variés relevant de tous les chapitres précédents. Le jour de l'épreuve, il ne vous sera pas indiqué que pour résoudre tel exercice il faut recourir à la proportionnalité ou à une mise en équation, choisir les bons outils est la première difficulté que vous rencontrerez… autant s'y préparer. Même quand l'outil adapté est évident, il est utile d'avoir à l'utiliser à nouveau alors que le travail effectué sur ce sujet remonte à plusieurs mois.

Deux choix caractérisent cet ouvrage : l'utilisation du langage courant pour exposer les notions mathématiques et la présence de conseils méthodologiques détaillés pour un nombre important de sujets mathématiques.

— Nous avons choisi d'exposer les connaissances mathématiques nécessaires dans des formes élémentaires, proches quand c'est possible de ce qui pourrait être utilisé à l'école. C'est ainsi qu'on revoit par exemple ce qu'est l'aire d'une figure et le sens des formules permettant de calculer les aires. Ce choix est discutable, mais nous pensons que la rigueur de pensée ne consiste pas à utiliser des notations dont le sens n'apparaît qu'à un niveau de technicité beaucoup plus élevé. Nous avons voulu dans l'ouvrage donner une idée de ce que peut signifier la rigueur mathématique à un niveau élémentaire : il ne s'agit pas de respecter des règles de pure forme dont le sens nous échappe, mais de développer une certaine forme d'honnêteté intellectuelle, d'exigence critique par rapport à ses propres écrits.
— Vous trouverez dans ce premier chapitre quelques conseils méthodologiques généraux qui gagneront probablement en clarté si vous les relisez après avoir travaillé les problèmes du chapitre deux. Cependant, nous proposons surtout des conseils méthodologiques spécifiques pour chaque chapitre : pourquoi et comment éviter le produit en croix dans les problèmes de proportionnalité, comment chercher un problème de construction géométrique ou une démonstration, comment mettre en équation un problème numérique...

Cet ouvrage qui ne comporte pas de préparation spécifique à la partie didactique de l'épreuve constitue cependant une première approche pertinente de la didactique. Il permet en effet aux candidats ayant déjà une certaine aisance en mathématiques de reformuler leurs connaissances pour leurs futurs élèves, et à ceux qui ont plus de difficultés de reconstruire des compétences mathématiques fondées sur la compréhension et non sur une accumulation de trucs.

L'expression « partie didactique » est d'ailleurs un abus de langage : le texte de l'arrêté définissant l'épreuve, que vous trouverez ci-dessous, parle « d'apprécier la capacité du candidat à maîtriser les notions présentes dans les situations d'enseignement ». Il ne s'agit donc pas de didactique au sens strict, mais plutôt de ce qu'on appelle la transposition didactique : la capacité à énoncer les savoirs visés dans une forme adaptée aux élèves. C'est exactement à cela que l'ensemble de cet ouvrage contribue.

Bien entendu, il sera tout de même nécessaire de s'entraîner à répondre à des questions proches de celles que vous pourriez rencontrer dans la troisième partie, ou dans des questions portant sur des productions d'élèves de la deuxième partie. Nous vous conseillons fortement pour cela d'utiliser les ressources mises en ligne sur le site arpeme.fr où vous trouverez des annales corrigées des CRPE des années 1997 à 2005 qui comportaient des questions didactiques assez proches de ce qui peut vous être demandé.

Par ailleurs, le choix fait dans cet ouvrage de détailler en profondeur certains exercices et les méthodes pour les résoudre conduit inévitablement à un nombre d'exercice relativement limité dans chaque chapitre. Le chapitre final d'exercices variés compense cette limite. Si malgré cela les exercices présents dans ce livre ne suffisent pas à alimenter votre travail, les annales déjà citées, mises à disposition par l'ARPEME (Association pour l'élaboration et la diffusion de Ressources Pédagogiques sur l'Enseignement des Mathématiques à l'École) en fournissent beaucoup d'autres. Vous en trouverez également un grand nombre sur le site Primaths.fr mis en ligne par l'auteur de ce livre.

L'épreuve de mathématiques du concours de professeur d'école

Extrait des annexes de l'arrêté du 19 avril 2013 fixant les modalités d'organisation du concours externe, du concours externe spécial, du second concours interne, du second concours interne spécial et du troisième concours de recrutement de professeurs des écoles

I-2. Épreuve écrite de mathématiques
L'épreuve vise à évaluer la maîtrise des savoirs disciplinaires nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et la capacité à prendre du recul par rapport aux différentes notions. Dans le traitement de chacune des questions, le candidat est amené à s'engager dans un raisonnement, à le conduire et à l'exposer de manière claire et rigoureuse. L'épreuve comporte trois parties :
1. Une première partie constituée d'un problème portant sur un ou plusieurs domaines des programmes de l'école ou du collège, ou sur des éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture, permettant d'apprécier particulièrement la capacité du candidat à rechercher, extraire et organiser l'information utile.
2. Une deuxième partie composée d'exercices indépendants, complémentaires à la première partie, permettant de vérifier les connaissances et compétences du candidat dans différents domaines des programmes de l'école ou du collège. Ces exercices pourront être proposés sous forme de questions à choix multiples, de questions à réponse construite ou bien d'analyses d'erreurs-types dans des productions d'élèves, en formulant des hypothèses sur leurs origines.
3. Une analyse d'un dossier composé d'un ou plusieurs supports d'enseignement des mathématiques, choisis dans le cadre des programmes de l'école primaire qu'ils soient destinés aux élèves ou aux enseignants (manuels scolaires, documents à caractère pédagogique), et productions d'élèves de tous types, permettant d'apprécier la capacité du candidat à maîtriser les notions présentes dans les situations d'enseignement.
L'épreuve est notée sur 40 points : 13 pour la première partie, 13 pour la deuxième et 14 pour la troisième.
5 points au maximum peuvent être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.
Une note globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire.
Durée de l'épreuve : quatre heures.

Conseils généraux

Utilisez le brouillon

Le brouillon est un outil absolument indispensable pour faire des mathématiques. Ses usages sont multiples :

- représenter par un schéma la situation décrite dans un problème,
- faire un schéma à main levée avant de construire une figure pour l'analyser et choisir le processus de construction,
- vérifier sur quelques exemples simples si une propriété dont on n'est plus très sûr est vraie,
- poser des opérations qui ne vous semblent pas mériter de figurer sur la copie,
- chercher à partir de quelques exemples la réponse probable à un problème général, réponse qu'il faudra ensuite démontrer,
- résoudre avec des nombres simples (entiers plutôt petits) un problème qui est posé avec des nombres moins familiers (des fractions par exemple) dans le but de reproduire ensuite avec les valeurs données la démarche trouvée dans le cas simplifié. . .

L'exercice que l'on peut résoudre sans brouillon fait figure d'exception. C'est seulement si l'exercice est familier, tellement connu que la procédure de résolution vous apparait immédiatement, que vous pouvez envisager de vous passer du brouillon.

Beaucoup d'étudiants préparant le concours rechignent à l'usage du brouillon au prétexte que cela prend trop de temps (et le temps est compté au concours). Cela montre généralement une mauvaise compréhension de l'intérêt du brouillon. Le travail au brouillon est souvent perçu comme une version moins soignée, mais identique sur le fond, de ce qui sera reporté sur la copie. Si cela était, on pourrait effectivement douter de l'intérêt, mais les exemples ci-dessus montrent que l'usage du brouillon est tout autre. De nombreux exemples seront donnés au fil des chapitres.

Il est particulièrement important de ne jamais effacer les recherches que l'on effectue au brouillon. D'une part une recherche qui semble ne pas aboutir peut être relancée quelques minutes plus tard par une nouvelle idée (et il serait alors dommage de devoir tout refaire). D'autre part, l'analyse de ses erreurs est une des principales sources de progrès. Si vous savez qu'un calcul est faux, il est essentiel de chercher où se situe l'erreur.

Soyez exigeant

Comprendre un exercice, ce n'est pas être capable de décrire les étapes de la solution, c'est être capable d'expliquer pourquoi ces étapes sont correctes et, surtout, être capable de retrouver pourquoi on a choisi de procéder de telle ou telle manière.

C'est ce niveau d'exigence qui rendra votre travail efficace, vos découvertes transférables aux prochains exercices. La plupart des exercices proposés dans cet ouvrage sont consistants, il ne s'agit pas d'une simple application mécanique de résultats appris, il est donc intéressant de reprendre un exercice qui vous a mis en difficulté quelques semaines plus tard. Ce délai devait suffire à ce que la mémoire des détails (quel est le résultat, par quelle opération a-ton commencé) soit effacée. En revanche, l'effort consenti lors du premier essai pour méditer les indications ou la solution, en dégager des lignes directrices, analyser vos éventuelles erreurs devrait vous permettre d'être plus efficace lors de la deuxième rencontre avec le problème.

N'hésitez pas à demander de l'aide et à coopérer

C'est une conséquence immédiate du point précédent. Repérer et rectifier une erreur est assez facile quand elle relève de l'étourderie. Quand l'erreur provient d'une notion mal comprise, il faut généralement l'aide de quelqu'un d'autre : un professeur si on en a un sous la main, ou bien un autre candidat. Par ailleurs, même si nous avons cherché à expliquer dans le détail la plupart des solutions d'exercices, il arrivera que les explications fournies ne répondent pas exactement aux questions que vous vous posez, c'est une autre raison de rechercher la coopération. Si vous vous préparez seul, recherchez d'autres candidats afin de constituer un groupe de travail : les difficultés des uns et des autres n'étant pas exactement les mêmes, l'entraide est souvent efficace.

Calculez à la main ou de tête

La règle générale pour les concours et examens en France est que les calculatrices sont autorisées, sauf mention contraire. Dans la version immédiatement précédente du concours de professeur d'école, la calculatrice a toujours été autorisée. Ce n'était pas le cas dans les versions antérieures où l'on rencontrait les deux situations. Nous ne saurions trop vous recommander de vous préparer dans l'hypothèse d'une épreuve sans calculatrice. Bien entendu, si c'était le cas, les calculs demandés seraient raisonnables, mais il parait totalement légitime d'attendre d'un futur professeur des écoles qu'il connaisse les tables de multiplication ou qu'il sache poser une division, toutes choses qu'il aura peut-être à enseigner dans quelques mois en cas de succès.

Il n'existe pas d'autre façon de progresser en calcul que de calculer. Ne pas utiliser la calculatrice sera probablement difficile au début si vous n'avez plus pratiqué le calcul depuis des années, mais vous devriez percevoir des progrès assez rapidement.

Choisissez vos priorités

S'il est naturel d'essayer de travailler l'ensemble des sujets pour se préparer au concours, il ne faut cependant pas verser dans l'encyclopédisme. Il est possible qu'une ou deux questions du concours portent sur des sujets marginaux que vous ignorez. Il vaut sans doute mieux renoncer d'emblée aux deux ou trois points que représentent ces questions et consacrer son temps à bien réussir toutes les autres. Division euclidienne, problèmes de proportionnalité, construction géométrique ou problèmes portant sur les aires sont par exemple des incontournables pour lesquels il convient de prendre tout le temps nécessaire à une compréhension en profondeur.

Ne recherchez pas la vitesse

L'épreuve du concours étant en temps limité, beaucoup de candidats privilégient la vitesse de réalisation. Dans ces conditions, il est difficile de faire des progrès significatifs. C'est en effet en méditant ses erreurs, en reformulant les explications trouvées dans ce livre ou ailleurs, en refaisant avec d'autres valeurs un exercice dont on perçoit que la compréhension est fragile qu'on progresse.

Privilégier la vitesse dès le début de votre travail ne permet seulement d'améliorer l'efficacité des automatismes déjà en place. Nous verrons dans le chapitre suivant que, bien souvent, les automatismes issus des mathématiques du collège et du lycée ne sont pas les plus pertinents pour le concours de professeur des écoles (ni d'ailleurs pour l'exercice du métier de professeur d'école).

La vitesse n'est pas négligeable, mais elle ne se travaille que dans les dernières semaines : abandonnez alors les chapitres que vous n'avez pas compris et multipliez les exercices dans les domaines que vous pensez maîtriser.

Chapitre 2

Six problèmes pour indiquer l'esprit du travail

Conseils pour ce chapitre

Chaque étape de cette partie est organisée autour d'un problème. Il convient donc, après avoir lu l'énoncé et s'être assuré qu'on a compris ce dont il s'agit, de prendre un temps personnel pour chercher. Comme les problèmes sont difficiles, il est probable que quelques minutes de recherche ne suffiront pas à le résoudre. Nous allons voir que ce ne sera pourtant pas du temps perdu.

Quand vous avez l'impression de ne plus avancer, de ne plus savoir quoi faire (ou bien quand vous pensez avoir résolu le problème), allez lire la première suggestion. Elle devrait vous donner les moyens de relancer votre recherche. Votre travail devrait donc consister en une alternance de temps de recherche personnelle et de temps conscacrés à lire et comprendre les différentes suggestions.

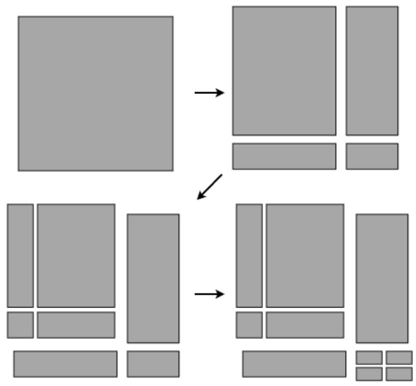
Quand vous parviendrez ainsi à la solution du problème, vous devriez disposer de tous les éléments pour la comprendre, même si vous n'avez pas réussi à la construire par vous même. Revenir ensuite sur ce que vous avez fait, comparer vos essais aux suggestions du livre, devrait vous aider à progresser.

Chaque problème est suivi d'un ou deux problèmes jumeaux. Le travail fait sur le premier problème devrait vous aider considérablement à résoudre son jumeau, à condition de ne pas chercher uniquement à reproduire une solution rédigée : ce sont les démarches suggérées dans les indications qui doivent être réinvesties.

Problème 1 : les papiers découpés

Énoncé du problème

On prend un morceau de papier, par exemple le carré en haut à gauche de l'illustration, et on le coupe en 4 morceaux. On prend ensuite l'un des morceaux (n'importe lequel, mais un seul à la fois) et on le coupe en quatre morceaux. On prend ensuite l'un des morceaux (n'importe lequel, mais un seul à la fois) et on le coupe en quatre morceaux...



Les dessins montrent les trois premières étapes du processus.

Si on effectue encore un grand nombre d'étapes de ce genre, obtiendra-t-on, au bout d'un certain nombre d'étapes, exactement 2000 morceaux ?

Indications

Indication 1

Comptez le nombre de morceaux sur les dessins fournis, imaginez ou effectuez réellement les étapes suivantes du découpage et notez le nombre de morceaux obtenus à chaque nouvelle étape.

Indication 2

Si on compte les morceaux à chaque étape, on trouve qu'il y a d'abord un seul morceau, puis quatre, puis sept, puis dix. En poursuivant et en notant les résultats à l'aide de chiffres et non de phrases, on obtient la liste suivante :

1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31

Observez cette liste, comporte-t-elle une régularité ?

Indication 3

Probablement avez-vous remarqué que la liste se construit en augmentant de 3 à chaque étape. Peut-on expliquer cette régularité et être ainsi certain qu'elle va se poursuivre aussi loin que l'on mène l'expérience ?

Indication 4

À chaque étape, un morceau de papier disparait : celui qu'on coupe en quatre n'existe plus après le découpage. En revanche, quatre nouveaux morceaux apparaissent. L'ajout de trois dans le nombre total de morceaux est donc le résultat de ces deux processus : enlever un morceau et en ajouter quatre. Le problème peut maintenant se reformuler ainsi : on construit une liste de nombres en partant de 1 et en comptant de trois en trois : 1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31...

Le nombre 2 000 figurera-t-il dans cette liste ?

Indication 5

Pour mieux montrer le processus d'ajout de 3 à chaque étape, on peut écrire les nombres de la liste de la façon suivante :

$1 \quad 1+3 \quad 1+2\times 3 \quad 1+3\times 3 \quad 1+4\times 3 \quad 1+5\times 3 \quad 1+6\times 3 \quad \ldots$

Indication 6

Cette nouvelle écriture peut suggérer au moins trois pistes différentes :

les nombres de la liste sont tous de la forme « 1 plus un certain nombre de fois 3 ». On peut tester des valeurs pour le « certain nombre » et se rapprocher progressivement de 2000. Par exemple $1 + 500 \times 3 = 1501$ est trop petit, et $1 + 1000 \times 3 = 3001$ est trop grand… essayons entre 500 et 1000.

On n'est pas obligé d'écrire tous les nombres de la liste, on peut faire de grands bonds en ajoutant d'un seul coup un grand nombre de fois 3. On peut ainsi passer par exemple de 1 à 901 puis à 1801 en ajoutant à chaque étape 300 fois 3, c'est-à-dire 900. Il est temps de ralentir, car on se rapproche du but.

On peut écrire que tous les calculs sont du même type en utilisant des lettres : les nombres que l'on peut obtenir sont tous de la forme $1 + n \times 3$ (ou n est un nombre entier). Le problème est une nouvelle fois reformulé : le nombre 2000 peut-il s'écrire 1 + 3n, (n étant un nombre entier).

Solutions rédigées

Chaque découpage d'un papier en quatre morceaux augmente le nombre de morceaux de 3.
Voici quelques exemples de nombres qu'on pourra atteindre ainsi (chacun est obtenu en ajoutant un certain nombre de fois 3 au précédent) :

$$1 + 600 \times 3 = 1801$$

$$1801 + 60 \times 3 = 1981$$

$$1981 + 6 \times 3 = 1999$$

Le nombre de morceaux suivant est 1999+3, soit 2002. Le nombre 2000 ne peut donc pas être atteint.

Chaque découpage d'un papier en quatre morceaux augmente le nombre de morceaux de 3. Le nombre initial étant 1, les autres sont de la forme $3n+1$, où n est un nombre entier. Cette écriture montre que les nombres obtenus ont pour reste 1 dans la division par 3.
2000 a pour reste 2 dans la division par 3, il ne peut donc pas être atteint.

Chaque découpage d'un papier en quatre morceaux augmente le nombre de morceaux de 3. Le nombre de morceaux après n étapes est donc égal à $3n + 1$.
Le problème revient donc à savoir s'il existe un entier n tel que $3n + 1 = 2000$.
L'unique solution de cette équation est $n = \frac{1999}{3}$, ce n'est pas un nombre entier. Il n'est donc pas possible d'obtenir exactement 2000 morceaux.