Avant-propos

Cet ouvrage de cours et d'exercices corrigés sur la Mécanique du Point s'adresse plus particulièrement aux étudiants de première année de Licence (L1) du cycle universitaire LMD.

Après une rapide présentation de la Mécanique (chapitre 1), l'ordre des chapitres respecte celui des différentes parties nécessaires à la modélisation et à l'étude du mouvement d'un point matériel. Ainsi, le chapitre 2 construit les notions propres au mouvement. La modélisation des causes des mouvements est abordée dans le chapitre 3. Le chapitre 4 met en regard le mouvement et ses causes en énonçant le Principe Fondamental de la Dynamique. De manière délibérée, le contenu de cet ouvrage insiste sur la justification des concepts et des affirmations faites. Le lecteur pourra ainsi y trouver calculs, démonstrations, réflexions et raisonnements détaillés.

En complément du cours, des exercices corrigés mettent en application les notions décrites. Egalement, onze feuillets d'exercices sont donnés avec leur corrigés. Chacun de ces feuillets constitue ce que les universitaires appellent des travaux dirigés. Ils sont regroupés de manière à permettre une progression cohérente. Les corrigés de l'ensemble de ces exercices sont très détaillés afin de ne laisser aucun point d'ombre quant à la compréhension et à la démarche des calculs.

La Mécanique du Point ne nécessite pas d'emblée l'utilisation d'outils mathématiques sophistiqués. Toutefois, elle requiert la connaissance et l'habitude de la manipulation de certains d'entre eux. Entre autres, le lecteur doit connaître les notions élémentaires sur les espaces vectoriels et affines euclidiens, mais aussi celles d'algèbre linéaire et d'analyse afin de manier facilement les concepts de produit scalaire, produit mixte, norme, application linéaire, dérivées. Pour cette raison, une annexe résume l'ensemble des outils mathématiques qui seront utilisés dans le cadre de ce cours et des exercices. Egalement, on a préféré, à certains endroits du livre, ré-énoncer certains résultats ou redonner certaines formules ou figures plutôt que de faire des renvois à des pages antérieures. L'objectif à cela est de faciliter la lecture et l'accessibilité du contenu de ce livre.

Les références bibliographiques [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] utilisées pour la rédaction de ce document sont inscrites à la fin de l'ouvrage.

Remerciements

Je crois qu'il faut toujours être reconnaissant envers ceux qui ont su nous communiquer la passion qu'ils avaient de leur métier. Difficile cependant de remercier tout le monde... j'ai eu tant d'enseignants extraordinaires et passionnés alors que j'étais étudiant à l'Université Paris 6 (de 1982 à 1987 et un peu plus si je compte la thèse). Mais je garde un souvenir tout particulier de Mr. Le Professeur Michel Mantion. Alors, merci à lui.

Lui et toutes ces autres personnes m'ont donné l'envie d'enseigner, de chercher et d'écrire. Alors, dès que j'ai pu, j'ai essayé de le faire du mieux possible. Depuis, j'ai rencontré d'autres personnes extraordinaires et passionnées qui m'ont aidé à enseigner, chercher et écrire. Là encore, pas facile de les remercier toutes. Mais Mr. Le Professeur Jean-Paul Boehler et Mr. Le Professeur Etienne Coquet garderont à jamais une place très particulière dans mon coeur. Merci à eux. Hélas, ils ne pourront pas lire ces mots. Alors je ne peux qu'espérer que lors des discussions que nous avons eues, ils ont remarqué l'infini reconnaissance que j'avais pour eux.

Merci enfin à Christiane Martin et Dominique Micollet, de l'UFR des Sciences et Techniques de l'Université de Bourgogne, pour leurs relectures attentives et minutieuses du manuscrit de ce livre.

Alain Thionnet, le 1 juin 2008.

Chapitre 1

Introduction : la Mécanique... c'est quoi ?

Si la géométrie euclidienne modélise l'espace dans lequel nous vivons, elle ne permet toutefois pas de rendre compte de la manière dont on s'y déplace : c'est à la Mécanique que revient cette tâche. Dans sa globalité, elle définit le mouvement des objets qui se déplacent dans l'espace modélisé par les géomètres.

La première partie de la Mécanique, la Cinématique, a pour but de décrire le mouvement sans se préoccuper des causes qui le produisent.

Les corps n'ont pas la capacité de changer d'eux-mêmes l'état dans lequel ils se trouvent. Cette caractéristique particulière s'appelle l'inertie : tout corps oppose à son mouvement une résistance qui varie en fonction de sa masse et de la manière dont elle est répartie. On voit donc qu'il est important de définir des grandeurs susceptibles de rendre compte de ces notions. C'est l'objet de la Cinétique. Toutefois, dans le cas où le système mécanique auquel on s'intéresse se résume à un point matériel, ce qui est le cas ici, la Cinétique se limite à dire qu'il convient de prendre en compte la masse de ce point dans son mouvement. Cette partie de la Mécanique ne sera donc pas examinée ici dans le détail.

Enfin, la Dynamique se propose d'expliquer et de formaliser les causes des mouvements. Mais son rôle ne s'arrête pas à cela. Elle tente aussi de les prévoir en mettant en regard les mouvements et leurs causes. Pour cela, elle formule le Principe Fondamental de la Dynamique et les Théorèmes Généraux.

Chapitre 2

Cinématique du point matériel

2.1 Définition d'un système mécanique. Point matériel

L'objet de la Mécanique est d'étudier l'évolution des systèmes mécaniques qui sont assimilés à chaque instant à un ensemble de points matériels coïncidant chacun avec un point de l'espace physique. Tout objet qui n'appartient pas au système S considéré fait partie de son milieu extérieur, noté $\bar{S}$.

La définition d'un système mécanique ne présume pas a priori d'une nature géométrique particulière. L'ensemble des points coïncidants peut être un ensemble de points discrets, un ensemble continu de points ou la réunion de points discrets et de parties continues.

Ces différentes natures d'ensemble se définissent à partir d'un ensemble E de points d'un espace affine euclidien :

- on dit que E est un ensemble discret de points si on peut toujours trouver un voisinage autour de n'importe lequel de ses points, P, dans lequel P est le seul représentant de l'ensemble. Si les points matériels d'un système S coïncident à chaque instant avec les points d'un ensemble discret, alors on dit que S est un système discret. Un point qualifié de matériel pour un tel système est un point mathématique auquel on associe des grandeurs mathématiques qui caractérisent ses propriétés physiques (scalaire positif pour sa masse, scalaire positif ou négatif pour sa charge...) ;
- on dit que E est un ensemble continu de points si on peut toujours trouver un chemin reliant deux quelconques de ses points et ne sortant pas de E. En employant le langage mathématique, on dit que E est un ensemble continu s'il est connexe par arc. Si les points matériels d'un

système S coïncident à chaque instant avec les points d'un ensemble continu, alors on dit que S est un système continu. Un point qualifié de matériel pour un tel système est un point mathématique auquel on associe des grandeurs mathématiques qui caractérisent ses propriétés physiques. Ces propriétés sont mesurées sur un petit volume (généralement noté dV et de masse dm) statistiquement représentatif de la matière au voisinage du point considéré.

Dans le cadre de cet ouvrage, l'objet que nous allons essentiellement nous attacher à étudier est un système mécanique discret réduit à un unique point matériel. Le plus souvent, on lui affectera un scalaire positif m qui représentera sa masse ou bien, plus rarement, un scalaire positif ou négatif q qui représentera sa charge.

Vocabulaire - Masse ponctuelle, charge ponctuelle. Un système mécanique pouvant être modélisé par un point matériel discret auquel est affecté un scalaire positif m qui représente sa masse, est également appelé masse ponctuelle m. Un système mécanique pouvant être modélisé par un point matériel discret auquel est affecté un scalaire positif ou négatif q représentant sa charge, est également appelé charge ponctuelle q.

L'objectif de la Mécanique, qui est d'étudier l'évolution des systèmes mécaniques, et, en tout premier, leur mouvement, sous-entend qu'il est nécessaire de repérer à chaque instant dans l'espace physique la position des points matériels du système. Elle implique donc au préalable de tout de modéliser le temps et l'espace.

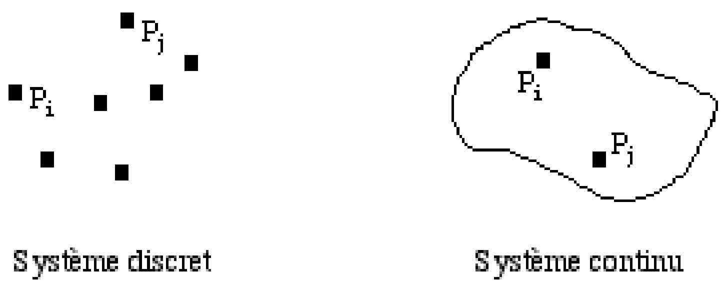

Fig. 2.1 – Systèmes mécaniques discret et continu

2.2 Schématisation du temps et de l'espace

2.2.1 Le temps. Horloge et date d'un instant. Durée

Le temps est schématisé par un espace affine euclidien à une dimension appelé espace des instants dont l'espace vectoriel associé, $\mathbb{R}$, est l'espace des durées. On repère un instant τ à partir d'un instant origine θ_0 et d'une unité de durée $\vec{e}$ selon la relation :

$$\overrightarrow{\theta_0 \tau} = t\vec{e}$$

où t est la date de l'instant considéré. Le couple $(\theta_0, \vec{e})$ est appelé horloge. On dit alors que t est la date de l'instant τ dans l'horloge H. Lorsqu'aucune ambiguïté ne sera possible, on ne fera référence qu'à la date t d'un instant τ qu'on appellera par commodité instant t. Si t_1 et t_2 sont les dates des instants τ_1 et τ_2 alors : $\vec{D} = \overrightarrow{\tau_1 \tau_2} = d\vec{e}$ s'appelle la durée entre les instants t_1 et t_2 et d est la mesure de cette durée. Comme précédemment, par abus de langage, on appelle d la durée entre les instants t_1 et t_2.

2.2.2 L'espace. Repère et coordonnées d'un point

L'espace physique est modélisé par un espace affine euclidien à trois dimensions, noté ε^3, dont l'espace vectoriel associé est $\mathbb{R}^3$. Ses éléments sont appelés des points. Dans la suite, par commodité, on confondra l'espace physique et ε^3. Dans cet espace, on repère un point M à partir d'un point origine, noté O, et de trois vecteurs, notés $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ et formant une base (notée b) de $\mathbb{R}^3$, en écrivant la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM} = q_1\vec{e_1} + q_2\vec{e_2} + q_3\vec{e_3}$$

On dit alors que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est décomposé (ou projeté) sur la base b. Le quadruplet $R = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ s'appelle un repère de l'espace ε^3. On note également : $R = (O, b)$. Le triplet (q_1, q_2, q_3) s'appelle les coordonnées du point M par rapport au repère R. La base sur laquelle est projeté le vecteur est qualifiée de base de projection du vecteur et le repère auquel elle est associée est qualifié de repère de projection du vecteur. La base b peut être quelconque. Généralement, on suppose qu'elle est orthonormée directe. Un repère dans l'espace physique se constitue usuellement avec quatre points matériels non coplanaires : l'un sert d'origine et les trois autres précisent les axes du repère.

2.2.3 Référentiel

Un référentiel est défini par l'association d'une horloge et d'un repère. Implicitement, dans toute la suite, on se munit, pour l'étude de tout système, d'un référentiel permettant de repérer la position et l'instant d'un évènement (présence d'un point à un instant donné).

2.3 Position et vecteur position d'un point matériel par rapport à un repère. Trajectoire

2.3.1 Définitions

La position d'un point matériel P à l'instant t est le point géométrique, noté $P(t)$, de l'espace physique ε^3, occupé par P à l'instant t. C'est le point coïncidant de P à l'instant t.

Le vecteur position d'un point matériel P à l'instant t par rapport à un point A (quelconque, mobile ou non) de ε^3 est défini comme étant le vecteur joignant A et $P(t)$: $\overrightarrow{AP(t)}$.

Si $A = O$, O étant l'origine d'un repère R, on dit alors que $\overrightarrow{OP(t)}$ est le vecteur position par rapport au repère R, à l'instant t, du point matériel P.

La trajectoire d'un point matériel P est l'ensemble des positions occupées par ce point matériel au cours du temps.

2.3.2 Loi de composition des vecteurs positions

Soit un point matériel P dans l'espace physique ε^3 auquel on associe deux repères distincts R et R' dont les origines et les bases sont respectivement O et O', b et b' : $R = (O, b)$ et $R' = (O', b')$. On suppose que le repère R' est en mouvement, relativement au repère R. Pour souligner cela, on note : $R'(t) = (O'(t), b'(t))$. Le vecteur position, à l'instant t, du point matériel P est :

- $\overrightarrow{OP(t)}$ par rapport au repère R ;
- $\overrightarrow{O'P(t)}$ par rapport au repère R'.

On a : $\overrightarrow{OP(t)} = \overrightarrow{OO'(t)} + \overrightarrow{O'(t)P(t)}$.

2.4 Degrés de liberté et configuration d'un système

On définit les degrés de liberté d'un système mécanique comme étant les grandeurs indépendantes qui permettent de positionner le système dans l'espace. La configuration d'un système, à l'instant t est l'ensemble des degrés de liberté du système considéré, à l'instant t.

Dans le cas où le système étudié se réduit à un unique point matériel libre, la donnée de ses trois coordonnées à l'instant t suffit pour le positionner dans l'espace à cet instant. On dit que le point matériel P a trois degrés de liberté. S'il est soumis, par exemple, à des contraintes géométriques (se déplacer sur un plan, une droite...), il n'est plus libre et le nombre de ses degrés de liberté est inférieur à trois.

Dans le cas où le système étudié est un système discret constitué de N points matériels libres, la donnée à l'instant t des trois coordonnées de chacun d'eux (i.e., $3N$ paramètres) définit la configuration du système à cet instant. Ce système a donc $3N$ degrés de liberté. Si ayant un mouvement (libre) d'ensemble, les N points matériels sont immobiles les uns par rapport aux autres, on montre que seuls six paramètres suffisent pour connaître la configuration de ce système particulier.

Dans le cas où le système étudié est un système continu, connaître sa configuration à chaque instant nécessite a priori une infinité de renseignements. En fait, selon sa nature, deux cas sont à distinguer :

– s'il est déformable, c'est-à-dire s'il n'existe aucune liaison géométrique entre ses points qui sont libres de se déplacer pour atteindre tous ensemble un certain état, alors il faut connaître la position de l'infinité de ses points pour connaître sa configuration. Ce type de système est traité par la Mécanique des Milieux Continus [16] [17] ;
– s'il est indéformable, on peut montrer que seuls six paramètres suffisent pour connaître sa configuration. Ces six paramètres constituent ses degrés de liberté. Ce type de système est traité dans le cadre de la Mécanique Générale (du Solide) [15].

2.5 Systèmes de repérage usuels

On considère l'espace physique ε^3 auquel on associe $R_0 = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ un repère dont la base $b_0 = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base quelconque.

Positionner un point M dans l'espace physique ε^3 consiste finalement à connaître les trois coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Ces trois coordonnées peuvent être connues à partir de différents paramètres. Usuellement, ces paramètres sont soit trois longueurs, soit deux longueurs et un angle, soit une longueur et deux angles. Ces trois types les plus usuels de paramétrage sont qualifiés respectivement de paramétrage cartésien, cylindrique et sphérique. Pour les définir, on choisit d'abord le repère associé à ε^3 comme étant le repère $R = (O, \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$ dont la base $b = (\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$ est supposée orthonormée directe.

2.6 Repérage cartésien

2.6.1 Définition

Pour ce repérage particulier, fondé sur la donnée de trois longueurs, on utilise la base b comme base de projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ (Fig. 2.2). Dans ce cas, on écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{x_1} + x_2\vec{x_2} + x_3\vec{x_3}$$

où les trois paramètres (x_1, x_2, x_3) s'appellent les paramètres du repérage cartésien du point M. Les paramètres (x_1, x_2, x_3) s'appellent respectivement l'abcisse, l'ordonnée et la cote. La base $b = (\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$ s'appelle la base cartésienne. La base b est une base orthonormée directe. Le repère $R = (O, b)$ s'appelle le repère cartésien. Dans la base b, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont (x_1, x_2, x_3), c'est-à-dire qu'elles coïncident avec les paramètres du repérage cartésien du point M. La base cartésienne ne dépend pas du point M.

Définition - Coordonnées cartésiennes. Les paramètres du repérage cartésien du point M, (x_1, x_2, x_3), sont usuellement appelés les coordonnées cartésiennes du point M. Les coordonnées cartésiennes coïncident avec les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ exprimé dans la base cartésienne.

2.6.2 Exercice : déplacement et volume élémentaires cartésiens

L'étude du mouvement d'un système mécanique nécessite le calcul de la dérivée de vecteurs par rapport à une grandeur donnée (le temps usuellement) ou de la différentielle de vecteurs. Par conséquent, connaître la dérivée ou la différentielle des vecteurs de la base de projection choisie est important. Ici, on réalise ces calculs ainsi que celui du volume élémentaire à inscrire dans une intégration volumique utilisant le repérage cartésien.

Calculons la différentielle des vecteurs de la base b par rapport aux paramètres (x_1, x_2, x_3), par rapport à la base b, en utilisant b comme base de projection. Faisons ce calcul comme si a priori chacun des vecteurs dépendait du point M, i.e. des trois paramètres (x_1, x_2, x_3). On a :

$$\left\{\begin{array}{l}
d\vec{x_1}|_b = \left.\frac{\partial\vec{x_1}}{\partial x_1}\right|_b dx_1 + \left.\frac{\partial\vec{x_1}}{\partial x_2}\right|_b dx_2 + \left.\frac{\partial\vec{x_1}}{\partial x_3}\right|_b dx_3 \\
d\vec{x_2}|_b = \left.\frac{\partial\vec{x_2}}{\partial x_1}\right|_b dx_1 + \left.\frac{\partial\vec{x_2}}{\partial x_2}\right|_b dx_2 + \left.\frac{\partial\vec{x_2}}{\partial x_3}\right|_b dx_3 \\
d\vec{x_3}|_b = \left.\frac{\partial\vec{x_3}}{\partial x_1}\right|_b dx_1 + \left.\frac{\partial\vec{x_3}}{\partial x_2}\right|_b dx_2 + \left.\frac{\partial\vec{x_3}}{\partial x_3}\right|_b dx_3
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left.\frac{\partial \vec{x_1}}{\partial x_1}\right|_b = \vec{0}\\ \left.\frac{\partial \vec{x_2}}{\partial x_1}\right|_b = \vec{0}\\ \left.\frac{\partial \vec{x_3}}{\partial x_1}\right|_b = \vec{0}\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\left.\frac{\partial \vec{x_1}}{\partial x_2}\right|_b = \vec{0}\\ \left.\frac{\partial \vec{x_2}}{\partial x_2}\right|_b = \vec{0}\\ \left.\frac{\partial \vec{x_3}}{\partial x_2}\right|_b = \vec{0}\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\left.\frac{\partial \vec{x_1}}{\partial x_3}\right|_b = \vec{0}\\ \left.\frac{\partial \vec{x_2}}{\partial x_3}\right|_b = \vec{0}\\ \left.\frac{\partial \vec{x_3}}{\partial x_3}\right|_b = \vec{0}\end{array}\right.$$

Finalement :

$$\left\{\begin{array}{l} d\vec{x_1}|_b = \vec{0}\\ d\vec{x_2}|_b = \vec{0}\\ d\vec{x_3}|_b = \vec{0}\end{array}\right.$$

On peut ainsi calculer :

$$\overrightarrow{\omega(b/b)} = \frac{1}{2}\left(\vec{x_1} \wedge d\vec{x_1}|_b + \vec{x_2} \wedge d\vec{x_2}|_b + \vec{x_3} \wedge d\vec{x_3}|_b\right) = \vec{0}$$

Calculons la différentielle du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport à la base b, en utilisant b comme base de projection. En utilisant le calcul différentiel, on a :

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{x_1} + x_2\vec{x_2} + x_3\vec{x_3}$$

$$\Longrightarrow d\overrightarrow{OM}\Big|_b = dx_1\vec{x_1} + x_1\ d\vec{x_1}|_b + dx_2\vec{x_2} + x_2\ d\vec{x_2}|_b + dx_3\vec{x_3} + x_3\ d\vec{x_3}|_b \ldots$$
$$\ldots = dx_1\vec{x_1} + dx_2\vec{x_2} + dx_3\vec{x_3}$$

En utilisant la formule de différentiation composée, on a :

$$\begin{aligned} d[\overrightarrow{OM}]^b\Big|_b &= d[\overrightarrow{OM}]^b\Big|_b + [\overrightarrow{\omega(b/b)}]^b \wedge [\overrightarrow{OM}]^b\\ &= dx_1\vec{x_1} + dx_2\vec{x_2} + dx_3\vec{x_3} + \vec{0} \wedge (dx_1\vec{x_1} + dx_2\vec{x_2} + dx_3\vec{x_3})\\ &= dx_1\vec{x_1} + dx_2\vec{x_2} + dx_3\vec{x_3}\end{aligned}$$

Les deux résultats précédents sont bien évidemment identiques.

Ecrivons la différentielle (i.e., la variation) du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport à la base b, comme étant la somme des trois variations de ce vecteur prises respectivement lorsque l'un des paramètres (x_1, x_2, x_3) bouge alors que les deux autres sont conservés constants. Ainsi, on écrit :

$$d\overrightarrow{OM}\Big|_b = d_1\overrightarrow{OM}\Big|_b + d_2\overrightarrow{OM}\Big|_b + d_3\overrightarrow{OM}\Big|_b$$

où :
- $d_1\overrightarrow{OM}\Big|_b = dx_1\vec{x_1}$ est la variation lorsque seule la variable x_1 varie ;
- $d_2\overrightarrow{OM}\Big|_b = dx_2\vec{x_2}$ est la variation lorsque seule la variable x_2 varie ;

– $d_3\overrightarrow{OM}\Big|_b = dx_3\vec{x_3}$ est la variation lorsque seule la variable x_3 varie.

Le volume élémentaire induit par ces trois vecteurs élémentaires est le déterminant de ces trois vecteurs :

$$\begin{aligned} dV &= det(d_1\overrightarrow{OM}\Big|_b, d_2\overrightarrow{OM}\Big|_b, d_3\overrightarrow{OM}\Big|_b) \\ &= det(dx_1\vec{x_1}, dx_2\vec{x_2}, dx_3\vec{x_3}) = dx_1dx_2dx_3 \end{aligned}$$

Cette expression est celle du volume élémentaire à utiliser lors d'une intégration volumique utilisant le paramétrage cartésien.

2.6.3 Opérateurs usuels dans le repérage cartésien

Soient $f(M)$ un champ scalaire, $\vec{v}(M)$ un champ de vecteurs et $t(M)$ un champ de tenseurs du second ordre. Dans la base cartésienne, les coordonnées de $\vec{v}(M)$ et $t(M)$ sont notées de la manière suivante :

$$\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} v_1(x_1,x_2,x_3) \\ v_2(x_1,x_2,x_3) \\ v_3(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix}$$

$$t(M) = \begin{pmatrix} t_{11}(x_1,x_2,x_3) & t_{12}(x_1,x_2,x_3) & t_{13}(x_1,x_2,x_3) \\ t_{21}(x_1,x_2,x_3) & t_{22}(x_1,x_2,x_3) & t_{23}(x_1,x_2,x_3) \\ t_{31}(x_1,x_2,x_3) & t_{32}(x_1,x_2,x_3) & t_{33}(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix}$$

Déplacement élémentaire

$$d\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

Volume élémentaire

$$dV = dx_1dx_2dx_3$$

Gradient d'un champ scalaire

$$\overrightarrow{grad}f(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(M)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(M)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f(M)}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Gradient d'un champ de vecteurs

$$grad\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1(M)}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1(M)}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1(M)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2(M)}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2(M)}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2(M)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3(M)}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3(M)}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3(M)}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Divergence d'un champ de vecteurs

$$div\vec{v}(M) = \frac{\partial v_1(M)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2(M)}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3(M)}{\partial x_3}$$

Divergence d'un champ de 2-tenseurs

$$\overrightarrow{div}t(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_{11}(M)}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{12}(M)}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{13}(M)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial t_{21}(M)}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{22}(M)}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{23}(M)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial t_{31}(M)}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{32}(M)}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{33}(M)}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Laplacien d'un champ scalaire

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x_3^2}$$

Laplacien d'un champ de vecteurs

$$\vec{\Delta}\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} \Delta v_1(M) \\ \Delta v_2(M) \\ \Delta v_3(M) \end{pmatrix}$$

Rotationnel d'un champ de vecteurs

$$\overrightarrow{rot}\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3(M)}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2(M)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1(M)}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3(M)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2(M)}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1(M)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

2.7 Repérage cylindrique

2.7.1 Définition

Pour ce repérage particulier, fondé sur la donnée de deux longueurs et d'un angle, on utilise une autre base de projection que la base cartésienne. Pour la construire, on note H la projection du point M dans le plan $(O, \vec{x_1}, \vec{x_2})$ (Fig. 2.2). On définit ensuite :

– les deux vecteurs suivants :
  . $\vec{e_l} = \frac{\overrightarrow{OH}}{||\overrightarrow{OH}||}$;
  . $\vec{e_\varphi} = \vec{x_3} \wedge \vec{e_l}$,
– les deux grandeurs suivantes :
  . $l = ||\overrightarrow{OH}||$;
  . $\varphi = (\widehat{\vec{x_1}, \overrightarrow{OH}})$ mesuré autour de $\vec{x_3}$, $\varphi \in [0, 2\pi[$.

Finalement, pour ce repérage particulier, on écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = l\vec{e_l} + x_3\vec{x_3}$$

où les trois paramètres (l, φ, x_3) s'appellent les paramètres du repérage cylindrique du point M. Le paramètre φ s'appelle l'angle polaire. La base $b_{cyl} = (\vec{e_l}, \vec{e_\varphi}, \vec{x_3})$ s'appelle la base cylindrique. La base b_{cyl} est une base orthonormée directe. Le repère $R_{cyl} = (O, \vec{e_l}, \vec{e_\varphi}, \vec{x_3})$ s'appelle le repère cylindrique. Dans la base b_{cyl}, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont $(l, 0, x_3)$, c'est-à-dire qu'elles ne coïncident pas avec les paramètres du repérage cylindrique du point M. La base cylindrique dépend du point M car les vecteurs $\vec{e_l}$ et $\vec{e_\varphi}$ dépendent de l'angle φ. En ce sens, on dit que c'est une base locale.

Définition - Coordonnées cylindriques. Les paramètres du repérage cylindrique du point M, (l, φ, x_3), sont usuellement appelés les coordonnées cylindriques du point M. ATTENTION : les coordonnées cylindriques ne sont pas les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ exprimé dans la base locale cylindrique.

On a :

$$\begin{cases} x_1 = l\cos\varphi \\ x_2 = l\sin\varphi \\ x_3 = x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{e_l} = \cos\varphi\vec{x_1} + \sin\varphi\vec{x_2} \\ \vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\vec{x_1} + \cos\varphi\vec{x_2} \\ \vec{x_3} = \vec{x_3} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{x_1} = \cos\varphi\vec{e_l} - \sin\varphi\vec{e_\varphi} \\ \vec{x_2} = \sin\varphi\vec{e_l} + \cos\varphi\vec{e_\varphi} \\ \vec{x_3} = \vec{x_3} \end{cases}$$

A l'aide de ces formules, on construit la matrice de passage de b à b_{cyl} :

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.7.2 Exercice : déplacement et volume élémentaires cylindriques

L'étude du mouvement d'un système mécanique nécessite le calcul de la dérivée par rapport à une grandeur donnée (le temps usuellement) ou de la différentielle de vecteurs. Par conséquent, connaître la dérivée ou la différentielle des vecteurs de la base de projection choisie est important. Donc, dans le cas où la base de projection est celle cylindrique, on réalise ces calculs ainsi que celui du volume élémentaire à inscrire dans une intégration volumique utilisant le repérage cylindrique.

Calculons la différentielle des vecteurs de la base b_{cyl} par rapport aux paramètres (l, φ, x_3), par rapport à la base b, en utilisant d'abord b comme base de projection. Les résultats obtenus seront ensuite exprimés dans b_{cyl}. Faisons ce calcul comme si a priori chacun des vecteurs dépendait des trois paramètres (l, φ, x_3). On a :

$$\left\{\begin{array}{l} d\vec{e_l}|_b = \left.\frac{\partial \vec{e_l}}{\partial l}\right|_b dl + \left.\frac{\partial \vec{e_l}}{\partial \varphi}\right|_b d\varphi + \left.\frac{\partial \vec{e_l}}{\partial x_3}\right|_b dx_3 \\ d\vec{e_\varphi}|_b = \left.\frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial l}\right|_b dl + \left.\frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial \varphi}\right|_b d\varphi + \left.\frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial x_3}\right|_b dx_3 \\ d\vec{x_3}|_b = \left.\frac{\partial \vec{x_3}}{\partial l}\right|_b dl + \left.\frac{\partial \vec{x_3}}{\partial \varphi}\right|_b d\varphi + \left.\frac{\partial \vec{x_3}}{\partial x_3}\right|_b dx_3 \end{array}\right.$$

On a :

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\frac{\partial \vec{e_l}}{\partial l}\right|_b = \frac{\partial \cos\varphi}{\partial l}\vec{x_1} + \cos\varphi \left.\frac{\partial \vec{x_1}}{\partial l}\right|_b + \frac{\partial \sin\varphi}{\partial l}\vec{x_2} + \sin\varphi \left.\frac{\partial \vec{x_2}}{\partial l}\right|_b = \vec{0} \\ \left.\frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial l}\right|_b = -\frac{\partial \sin\varphi}{\partial l}\vec{x_1} - \sin\varphi \left.\frac{\partial \vec{x_1}}{\partial l}\right|_b + \frac{\partial \cos\varphi}{\partial l}\vec{x_2} + \cos\varphi \left.\frac{\partial \vec{x_2}}{\partial l}\right|_b = \vec{0} \\ \left.\frac{\partial \vec{x_3}}{\partial l}\right|_b = \vec{0} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\frac{\partial \vec{e_l}}{\partial \varphi}\right|_b = \frac{\partial \cos\varphi}{\partial \varphi}\vec{x_1} + \cos\varphi \left.\frac{\partial \vec{x_1}}{\partial \varphi}\right|_b + \frac{\partial \sin\varphi}{\partial \varphi}\vec{x_2} + \sin\varphi \left.\frac{\partial \vec{x_2}}{\partial \varphi}\right|_b \\ \left.\frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial \varphi}\right|_b = -\frac{\partial \sin\varphi}{\partial \varphi}\vec{x_1} - \sin\varphi \left.\frac{\partial \vec{x_1}}{\partial \varphi}\right|_b + \frac{\partial \cos\varphi}{\partial \varphi}\vec{x_2} + \cos\varphi \left.\frac{\partial \vec{x_2}}{\partial \varphi}\right|_b \\ \left.\frac{\partial \vec{x_3}}{\partial \varphi}\right|_b = \vec{0} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left.\frac{\partial \vec{e_l}}{\partial \varphi}\right|_b = -\sin\varphi\vec{x_1} + \cos\varphi\vec{x_2} = \vec{e_\varphi} \\ \left.\frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial \varphi}\right|_b = -\cos\varphi\vec{x_1} - \sin\varphi\vec{x_2} = -\vec{e_l} \\ \left.\frac{\partial \vec{x_3}}{\partial \varphi}\right|_b = \vec{0} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\frac{\partial \vec{e_l}}{\partial x_3}\right|_b = \frac{\partial \cos\varphi}{\partial x_3}\vec{x_1} + \cos\varphi \left.\frac{\partial \vec{x_1}}{\partial x_3}\right|_b + \frac{\partial \sin\varphi}{\partial x_3}\vec{x_2} + \sin\varphi \left.\frac{\partial \vec{x_2}}{\partial x_3}\right|_b = \vec{0} \\ \left.\frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial x_3}\right|_b = -\frac{\partial \sin\varphi}{\partial x_3}\vec{x_1} - \sin\varphi \left.\frac{\partial \vec{x_1}}{\partial x_3}\right|_b + \frac{\partial \cos\varphi}{\partial x_3}\vec{x_2} + \cos\varphi \left.\frac{\partial \vec{x_2}}{\partial x_3}\right|_b = \vec{0} \\ \left.\frac{\partial \vec{x_3}}{\partial x_3}\right|_b = \vec{0} \end{array}\right.$$

Finalement :

$$\left\{\begin{array}{l} d\vec{e_l}|_b = \vec{e_\varphi}d\varphi \\ d\vec{e_\varphi}|_b = -\vec{e_l}d\varphi \\ d\vec{x_3}|_b = \vec{0} \end{array}\right.$$

On peut ainsi calculer le vecteur de rotation de b_{cyl} par rapport à b :

$$\overrightarrow{\omega(b_{cyl}/b)} = \frac{1}{2}\left(\vec{e_l} \wedge d\vec{e_l}|_b + \vec{e_\varphi} \wedge d\vec{e_\varphi}|_b + \vec{x_3} \wedge d\vec{x_3}|_b\right) = \vec{x_3}d\varphi$$

Calculons la différentielle du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport à la base b, en utilisant b_{cyl} comme base de projection. En utilisant le calcul différentiel, on a :

$$\overrightarrow{OM} = l\vec{e_l} + x_3\vec{x_3}$$

$$\Longrightarrow d\overrightarrow{OM}\Big|_b = dl\vec{e_l} + l\ d\vec{e_l}|_b + dx_3\vec{x_3} + x_3\ d\vec{x_3}|_b = dl\vec{e_l} + ld\varphi\vec{e_\varphi} + dx_3\vec{x_3}$$

En utilisant la formule de différentiation composée, on a :

$$\begin{aligned} d[\overrightarrow{OM}]^{b_{cyl}}\Big|_b &= d[\overrightarrow{OM}]^{b_{cyl}}\Big|_{b_{cyl}} + [\overrightarrow{\omega(b_{cyl}/b)}]^{b_{cyl}} \wedge [\overrightarrow{OM}]^{b_{cyl}} \\ &= dl\vec{e_l} + dx_3\vec{x_3} + \vec{x_3}d\varphi \wedge (l\vec{e_l} + x_3\vec{x_3}) \\ &= dl\vec{e_l} + dx_3\vec{x_3} + ld\varphi\vec{e_\varphi} \end{aligned}$$

Les deux résultats précédents sont bien évidemment identiques.

Ecrivons la différentielle (i.e., la variation) du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport à la base b, comme étant la somme des trois variations de ce vecteur prises respectivement lorsque l'un des paramètres (l, φ, x_3) bouge alors que les deux autres sont conservés constants. Ainsi :

$$d\overrightarrow{OM}\Big|_b = d_l\overrightarrow{OM}\Big|_b + d_\varphi\overrightarrow{OM}\Big|_b + d_3\overrightarrow{OM}\Big|_b$$

où :
- $d_l\overrightarrow{OM}\Big|_b = dl\vec{e_l}$ est la variation lorsque seule la variable l varie ;
- $d_\varphi\overrightarrow{OM}\Big|_b = ld\varphi\vec{e_\varphi}$ est la variation lorsque seule la variable φ varie ;
- $d_3\overrightarrow{OM}\Big|_b = dx_3\vec{x_3}$ est la variation lorsque seule la variable x_3 varie.

Le volume élémentaire induit par ces trois vecteurs élémentaires est le déterminant de ces trois vecteurs :

$$\begin{aligned} dV &= det(d_l\overrightarrow{OM}\Big|_b, d_\varphi\overrightarrow{OM}\Big|_b, d_3\overrightarrow{OM}\Big|_b) \\ &= det(dl\vec{e_l}, ld\varphi\vec{e_\varphi}, dx_3\vec{x_3}) = ldld\varphi dx_3 \end{aligned}$$

Cette expression est celle du volume élémentaire à utiliser lors d'une intégration volumique utilisant le paramétrage cylindrique.

2.7.3 Opérateurs usuels dans le repérage cylindrique

Soient $f(M)$ un champ scalaire, $\vec{v}(M)$ un champ de vecteurs et $t(M)$ un champ de tenseurs du second ordre. Dans la base cylindrique, les coordonnées de $\vec{v}(M)$ et $t(M)$ sont notées de la manière suivante :

$$\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} v_l(l,\varphi,x_3) \\ v_\varphi(l,\varphi,x_3) \\ v_3(l,\varphi,x_3) \end{pmatrix}$$

$$t(M) = \begin{pmatrix} t_{ll}(l,\varphi,x_3) & t_{l\varphi}(l,\varphi,x_3) & t_{l3}(l,\varphi,x_3) \\ t_{\varphi l}(l,\varphi,x_3) & t_{\varphi\varphi}(l,\varphi,x_3) & t_{\varphi 3}(l,\varphi,x_3) \\ t_{3l}(l,\varphi,x_3) & t_{3\varphi}(l,\varphi,x_3) & t_{33}(l,\varphi,x_3) \end{pmatrix}$$

Déplacement élémentaire

$$d\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} dl \\ ld\varphi \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

Volume élémentaire

$$dV = ldld\varphi dx_3$$

Gradient d'un champ scalaire

$$\overrightarrow{grad}f(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(M)}{\partial l} \\ \frac{1}{l}\frac{\partial f(M)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f(M)}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Gradient d'un champ de vecteurs

$$grad\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_l(M)}{\partial l} & \frac{1}{l}\frac{\partial v_l(M)}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi(M)}{l} & \frac{\partial v_l(M)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_\varphi(M)}{\partial l} & \frac{1}{l}\frac{\partial v_\varphi(M)}{\partial \varphi} + \frac{v_l(M)}{l} & \frac{\partial v_\varphi(M)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3(M)}{\partial l} & \frac{1}{l}\frac{\partial v_3(M)}{\partial \varphi} & \frac{\partial v_3(M)}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Divergence d'un champ de vecteurs

$$div\vec{v}(M) = \frac{\partial v_l(M)}{\partial l} + \frac{1}{l}\frac{\partial v_\varphi(M)}{\partial \varphi} + \frac{v_l(M)}{l} + \frac{\partial v_3(M)}{\partial x_3} \dots$$
$$\dots = \frac{1}{l}\frac{\partial (lv_l(M))}{\partial l} + \frac{1}{l}\frac{\partial v_\varphi(M)}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_3(M)}{\partial x_3}$$

Divergence d'un champ de 2-tenseurs

$$\overrightarrow{div}t(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_{ll}(M)}{\partial l} + \frac{1}{l}\frac{\partial t_{l\varphi}(M)}{\partial \varphi} + \frac{\partial t_{l3}(M)}{\partial x_3} + \frac{t_{ll}(M) - t_{\varphi\varphi}(M)}{l} \\ \frac{\partial t_{\varphi l}(M)}{\partial l} + \frac{1}{l}\frac{\partial t_{\varphi\varphi}(M)}{\partial \varphi} + \frac{\partial t_{\varphi 3}(M)}{\partial x_3} + \frac{t_{l\varphi}(M) + t_{\varphi l}(M)}{l} \\ \frac{\partial t_{3l}(M)}{\partial l} + \frac{1}{l}\frac{\partial t_{3\varphi}(M)}{\partial \varphi} + \frac{\partial t_{33}(M)}{\partial x_3} + \frac{t_{3l}(M)}{l} \end{pmatrix}$$

Laplacien d'un champ scalaire

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 f(M)}{\partial l^2} + \frac{1}{l}\frac{\partial f(M)}{\partial l} + \frac{1}{l^2}\frac{\partial^2 f(M)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x_3^2}$$

Laplacien d'un champ de vecteurs

$$\vec{\Delta}\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} \Delta v_l(M) - \frac{2}{l^2}\frac{\partial v_\varphi(M)}{\partial \varphi} - \frac{v_l(M)}{l^2} \\ \Delta v_\varphi(M) + \frac{2}{l^2}\frac{\partial v_l(M)}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi(M)}{l^2} \\ \Delta v_3(M) \end{pmatrix}$$