# 1 – Limites

## 1.1 Généralités

### 1.1.1 Limite en $\pm\infty$

**Définition.**
- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Une fonction $f$ *tend* vers $\ell$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez grand. On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.
- Une fonction $f$ *tend* vers $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ dépasse n'importe quel réel $A$ pour $x$ assez grand. On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Les définitions sont évidemment analogues avec $-\infty$. Ajoutons par ailleurs qu'il est souvent commode d'utiliser la notation directe, par exemple $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

**Théorème.** Les fonctions de référence $\sqrt{x}$ et $x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ tendent vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

*Preuve.* On démontre par exemple que $x^2$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Soit $A$ un réel positif quelconque. Si $x > \sqrt{A}$ alors $x^2 > A$. Par définition, on a le résultat souhaité. $\square$

### 1.1.2 Limite en un réel

**Définition.**
- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Une fonction $f$ *tend* vers $\ell$ en $a$ si tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez voisin de $a$. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a} f = \ell$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Une fonction $f$ *tend* vers $+\infty$ en $a$ si $f(x)$ dépasse n'importe quel réel $A$ pour $x$ assez voisin de $a$. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a} f = +\infty$.

Le deuxième point de la définition s'étend évidemment avec $-\infty$.

**Théorème.** Si une fonction $f$ est définie sur un voisinage de $a$ et y admet une limite finie $\ell$ alors $\ell = f(a)$.

*Preuve (idée).* On montre que $f(a)$ appartient à tout intervalle ouvert $I$ contenant $\ell$. Si $f(a) \neq \ell$ alors c'est impossible. $\square$

### 1.1.3 Usage des $\varepsilon$

Lorsqu'on veut prouver qu'une fonction $f$ possède une limite finie $\ell$ en $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, on est concrètement souvent amené à considérer que l'intervalle ouvert autour de $\ell$ est de la forme $]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$. On peut montrer que $f(x)$ tend vers $\ell$ en prouvant que $|f(x) - \ell|$ tend vers 0 de la manière suivante :

- choisir un réel $\varepsilon > 0$ quelconque ;
- montrer que si $x$ est suffisamment proche de $a$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

### 1.1.4 Limites à gauche et à droite

Une fonction peut parfois ne pas posséder de limite en un réel $a$ mais seulement une limite à gauche et/ou à droite de $a$ (penser par exemple à la fonction inverse en 0).

**Définition.**

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Une fonction $f$ *tend* vers $\ell$ *à gauche* de $a$ si tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez voisin de $a$ et $x < a$. On note alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a^-} f = \ell$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Une fonction $f$ *tend* vers $+\infty$ *à gauche* de $a$ si $f(x)$ dépasse n'importe quel réel $A$ pour $x$ assez voisin de $a$ et $x < a$. On note alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$.

Les définitions sont évidemment analogues *à droite* et on note alors $x \to a^+$ sous la limite.

Lorsqu'une quantité conserve (par exemple) un signe positif, on peut l'affubler d'un exposant « + » qui peut être utile. Par exemple, comme on le verra par la suite, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ est de la forme « $\dfrac{1}{0^+}$ » et vaut donc $+\infty$ alors que simplement « $\dfrac{1}{0}$ » est une forme indéterminée.

**Théorème.** Soit $f$ une fonction définie (sauf éventuellement en $a$) sur un intervalle contenant $a$. La fonction $f$ possède une limite en $a$ si et seulement si $f$ possède des limites à gauche et à droite égales (à $f(a)$ si $f$ est définie en $a$).

*Preuve.* Il suffit de revenir aux définitions. □

### 1.1.5 Unicité de la limite

Les fonctions ne possèdent pas le don d'ubiquité :

**Théorème.** Si une fonction possède une limite alors celle-ci est unique.

*Preuve.* Plaçons-nous par exemple en $+\infty$. Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et supposons qu'elle y possède deux limites distinctes $\ell$ et $\ell'$. Il existe un réel $A$ tel que $x > A$ implique $|f(x) - \ell| < \dfrac{|\ell - \ell'|}{2}$. De même, il existe un réel $A'$ tel que $x > A'$ implique $|f(x) - \ell'| < \dfrac{|\ell - \ell'|}{2}$. Ainsi, si $x > \max(A, A')$ alors $|\ell - \ell'| \leqslant |\ell - f(x)| + |f(x) - \ell'| < \dfrac{|\ell - \ell'|}{2} + \dfrac{|\ell - \ell'|}{2} = |\ell - \ell'|$. Absurde. □

## 1.2 Opérations

En pratique, on calcule souvent une limite en combinant des résultats préétablis sur les fonctions de référence et non pas en revenant à chaque fois à la définition. Nous prouverons uniquement les résultats les plus importants.

### 1.2.1 Somme

**Théorème.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions ayant pour limites $\ell$ et $\ell'$ en un réel $a$ ou en $a = \pm\infty$. Alors $\lim\limits_{a}(f + g) = \ell + \ell'$.

*Preuve.* Supposons ici que $a = +\infty$ (le cas $a \in \mathbb{R}$ se traite identiquement). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un réel $A$ tel que $x > A$ implique $|f(x) - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et un réel $A'$ tel que $x > A'$ implique $|g(x) - \ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Si $x > \max(A, A')$ alors $|(f + g)(x) - (\ell + \ell')| = |(f(x) - \ell) + (g(x) - \ell')| \leqslant |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Par définition, $\lim\limits_{x \to +\infty}(f + g) = \ell + \ell'$. □

### 1.2.2 Produit

**Lemme.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions ayant pour limites $\ell$ et $\ell'$ en un réel $a$ ou en $a = \pm\infty$. Si $\ell = 0$ alors $\lim\limits_{a} fg = 0$.

*Preuve.* Supposons ici que $a = +\infty$ (le cas $a \in \mathbb{R}$ se traite identiquement). Pour $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe un réel $A$ tel que $x > A$ implique $|f(x)| < \varepsilon$ et un réel $A'$ tel que $x > A'$ implique $|g(x) - \ell'| < \varepsilon$. Si $x > \max(A, A')$ alors $|f(x)g(x)| = |f(x)(g(x) - \ell') + f(x)\ell'| \leqslant |f(x)|.|(g(x) - \ell')| + |f(x)|.|\ell'| < \varepsilon^2 + |\ell'|\varepsilon$. Cette dernière expression tend bien vers 0 lorsque $\varepsilon$ tend vers 0 d'après le théorème sommatoire précédent. □

**Théorème.** Si $f$ et $g$ sont deux fonctions ayant pour limites $\ell$ et $\ell'$ en un réel $a$ ou en $a = \pm\infty$ alors $\lim\limits_a fg = \ell\ell'$.

*Preuve.* On forme $f(x)g(x) - \ell\ell' = \underbrace{g(x)}_{\to\ell'}\underbrace{(f(x)-\ell)}_{\to 0} + \underbrace{\ell}_{\text{cste}}\underbrace{(g(x)-\ell')}_{\to 0}$, expression qui tend bien vers 0 d'après le lemme. □

### 1.2.3 Quotient

**Théorème.** Si $f$ et $g$ sont deux fonctions ayant pour limites $\ell$ et $\ell'$ en un réel $a$ ou en $a = \pm\infty$ alors $\lim\limits_a \frac{f}{g} = \frac{\ell}{\ell'}$ si $\ell' \neq 0$.

### 1.2.4 Composée

**Théorème.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions telles que la composée $g \circ f$ soit définie et $a, b, \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} g(X) = \ell$ alors $\lim\limits_a g \circ f = \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \ell$.

*Preuve (idée).* Si $X$ est suffisamment proche de $b$ alors $g(X)$ devient voisin de $g(b)$. Afin de rendre $X$ suffisamment proche de $b$, il suffit de rendre $x$ suffisamment voisin de $a$. □

### 1.2.5 Formes indéterminées

Si beaucoup d'opérations ont un résultat qui est facile à mémoriser (on a par exemple « $(-2) \times (+\infty) = -\infty$ »), certaines ne conduisent pas à un résultat systématique. Ce sont les *formes indéterminées* (il vaut clairement mieux penser « formes *à déterminer* ») : $(+\infty)-(+\infty)$, $(+\infty)\times 0$, $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{?}{0}$. Dans ces situations, il existe des techniques pour *lever l'indétermination*, dont les principales sont :

- la factorisation par le terme dominant, ce qui revient à constater qu'il y a des termes qui sont négligeables ;
- la simplification, permettant par exemple d'éliminer des pôles communs au numérateur et au dénominateur d'une fraction ;
- l'examen des limites à gauche et à droite ;
- l'encadrement par des fonctions plus simples de même limite ;
- la méthode de la quantité conjuguée lorsqu'on a affaire à des racines carrées ;
- la reconnaissance d'un taux de variation, convergeant donc vers un nombre dérivé.

### 1.2.6 Polynômes et fractions rationnelles

> **Théorème.** La limite d'un polynôme en $\pm\infty$ est donnée par celle de son terme de plus haut degré.

*Preuve.* Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. On factorise par le terme dominant en $\pm\infty$, soit $a_n x^n$ : $P(x) = a_n x^n \left(1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + \cdots + \dfrac{a_1}{a_n} x^{-(n-1)} + \dfrac{a_0}{a_n} x^{-n}\right)$, en supposant que $P$ est de degré $n$, c'est-à-dire $a_n \neq 0$. Il est facile de montrer que la parenthèse tend vers 1, d'où le résultat. □

> **Théorème.** La limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$ est donnée par celle du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

*Preuve.* La méthode est identique à celle de la preuve précédente. □

Il sera très commode, que ce soit pour trouver des asymptotes ou faire de l'arithmétique de spécialité, de savoir effectuer une *division euclidienne de polynômes*. Le principe est de diviser les termes de plus haut degré du dividende et du diviseur à chaque étape et de respecter les règles habituelles d'une division euclidienne d'entiers. Par exemple :

$$\begin{array}{ccccccc|c}
\boldsymbol{2x^4} & & & + & 3x^2 & + & 1 & \boldsymbol{x}-1 \\ \cline{8-8}
2x^4 & - & 2x^3 & & & & & \boldsymbol{2x^3} \\ \cline{1-7}
 & & 2x^3 & + & 3x^2 & + & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
2x^4 & & & + & 3x^2 & + & 1 & \boldsymbol{x}-1 \\ \cline{8-8}
2x^4 & - & 2x^3 & & & & & 2x^3+\boldsymbol{2x^2} \\ \cline{1-7}
 & & \boldsymbol{2x^3} & + & 3x^2 & + & 1 & \\
 & & 2x^3 & - & 2x^2 & & & \\ \cline{3-7}
 & & & & 5x^2 & + & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc|c}
2x^4 & & & + & 3x^2 & & & + & 1 & \boldsymbol{x}-1 \\ \cline{10-10}
2x^4 & - & 2x^3 & & & & & & & 2x^3+2x^2+\boldsymbol{5x} \\ \cline{1-9}
 & & 2x^3 & + & 3x^2 & & & + & 1 & \\
 & & 2x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\ \cline{3-9}
 & & & & \boldsymbol{5x^2} & & & + & 1 & \\
 & & & & 5x^2 & - & 5x & & & \\ \cline{5-9}
 & & & & & & 5x & + & 1 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
2x^4 & & & + & 3x^2 & & & + & 1 & \boldsymbol{x}-1 \\ \cline{10-10}
2x^4 & - & 2x^3 & & & & & & & 2x^3+2x^2+5x+\mathbf{5} \\ \cline{1-9}
 & & 2x^3 & + & 3x^2 & & & + & 1 & \\
 & & 2x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\ \cline{3-9}
 & & & & 5x^2 & & & + & 1 & \\
 & & & & 5x^2 & - & 5x & & & \\ \cline{5-9}
 & & & & & & \mathbf{5x} & + & 1 & \\
 & & & & & & 5x & - & 5 & \\ \cline{7-9}
 & & & & & & & & 6 &
\end{array}
$$

On arrête la division dès que le degré du reste est inférieur à celui du diviseur.

On obtient donc ici : $2x^4 + 3x^2 + 1 = (x - 1)(2x^3 + 2x^2 + 5x + 5) + 6$ c'est-à-dire une division $A = BQ + R$. La forme rationnelle est alors : $\dfrac{2x^4 + 3x^2 + 1}{x - 1} = 2x^3 + 2x^2 + 5x + 5 + \dfrac{6}{x - 1}$ c'est-à-dire $\dfrac{A}{B} = Q + \dfrac{R}{B}$.

Notons que le respect des alignements est essentiel à la bonne marche pratique de cette méthode. L'absence du signe « − » devant une ligne qu'on soustrait permet d'éviter une affectation de ce signe uniquement au premier terme, ce qui est une erreur de distraction assez courante.

La division euclidienne vient en complément de la méthode classique de réduction au même dénominateur et d'identification.

## 1.3 Comparaison

### 1.3.1 Inégalités

**Théorème.** Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- (encadrement) Si, pour $x$ voisin de $a$, on a $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si $g$ et $h$ ont la même limite finie $\ell$ en $a$, alors $f$ tend en $a$ vers $\ell$.
- (minoration) Si, pour $x$ voisin de $a$, on a $g(x) \leqslant f(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors $f$ tend en $a$ vers $+\infty$.
- (majoration) Si, pour $x$ voisin de $a$, on a $f(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = -\infty$, alors $f$ tend en $a$ vers $-\infty$.

*Preuve.* Démontrons le premier point pour $a = +\infty$. Soit $I$ un intervalle ouvert contenant $\ell$. Les fonctions $g$ et $h$ tendent vers $\ell$ ; il existe donc un réel $G$ tel que $x > G$ implique $g(x) \in I$ et un réel $H$ tel que $x > H$ implique $h(x) \in I$. Ainsi, si $x > \max(G, H)$ alors $g(x) \in I$ et $h(x) \in I$. Puisque $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, $f(x) \in I$ aussi. Par définition, $f$ tend vers $\ell$ en $a$. $\square$

### 1.3.2 Asymptotes

**Définition.** Deux fonctions sont dites *asymptotes* en $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si leur différence tend vers 0 en $a$.

Ceci signifie concrètement que leurs courbes se rapprochent infiniment au voisinage de $x = a$. Deux courbes sont *asymptotes* si leurs fonctions associées le sont.

**Définition.**
- Si une fonction $f$ possède une limite finie $\ell$ en $\pm\infty$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est l'*asymptote horizontale* à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.
- Si une fonction $f$ possède une limite infinie en $a \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $x = a$ est l'*asymptote verticale* à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $a$.
- S'il existe une droite $\Delta$ d'équation $y = ax + b$ avec $a \neq 0$ asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$ alors $\Delta$ est l'*asymptote oblique* à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

L'existence d'une valeur interdite ne suffit pas à assurer l'existence d'une asymptote verticale. Par exemple, si $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$ alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ (nous le démontrerons au chapitre 5). Ainsi $x = 0$ est une valeur interdite mais pas l'équation d'une asymptote verticale.

Supposons que $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$. On a ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$. Par conséquent $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$. En pratique, on recherchera donc une *éventuelle* asymptote oblique en étudiant la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$, qui donne le candidat pour la pente $a$.

## 1.4 Exercices

*Ce qui concerne les limites de suites (qui ne sont par définition que des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$) est traité dans les exercices du chapitre 2. De la même manière, certains exercices sur les limites seront traités dans le cadre des suites, des fonctions trigonométriques, etc.*

### Opérations

**1.1.** Calculer la limite de $\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**1.2.** Calculer la limite de $\dfrac{x^2-x+2}{(x-2)^2}$ lorsque $x$ tend vers 2.

**1.3.** Calculer la limite de $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$ lorsque $x$ tend vers 1.

**1.4.** Calculer la limite de $\dfrac{1}{x^2-4}$ lorsque $x$ tend vers 2.

### Factorisation par le terme dominant

**1.5.** Calculer la limite de $x-\sqrt{x}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**1.6.** Calculer la limite de $x^3-6x+5$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**1.7.** Calculer la limite de $\dfrac{2x^2+3}{x^4+x^2+1}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**1.8.** Calculer la limite de $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x+2}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**1.9.** Calculer la limite de $\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+3}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

### Quantité conjuguée et taux de variation

**1.10.** Déterminer, par limite d'un taux d'accroissement, le nombre dérivé de la fonction racine carrée en un réel strictement positif donné.
*On constatera que la méthode de la quantité conjuguée est utile dans ce calcul de 1$^{\text{re}}$S.*

**1.11.** Calculer la limite de $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**1.12.** Calculer la limite de $\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ lorsque $x$ tend vers 3.