Chapitre 1

Les bases de la programmation linéaire

1.1 Formulation d'un problème de programmation linéaire

La programmation mathématique est le nom donné aux problèmes d'optimisation liée ou optimisation sous contraintes : il s'agit de rechercher l'optimum d'une fonction de variables, étant donné que celles-ci doivent vérifier un certain nombre d'équations et/ou d'inéquations appelées contraintes.
Le problème le plus simple de programmation mathématique est celui de programmation linéaire (P.L.) : il s'agit de la situation où à la fois la fonction à optimiser et les contraintes à respecter sont linéaires, c'est-à-dire du premier degré en les variables.
La forme la plus générale d'un problème de P.L. est la suivante que nous noterons (LP) ("Linear Programming") :

$$
(LP) \quad
\begin{array}{rrcll}
\text{opt } z = & \sum_{j=1}^{n} c_j \; x_j & & & (1.1) \\
& \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j & \begin{smallmatrix}\leq \\ \geq\end{smallmatrix} & d_i \quad i = 1, \ldots, p & (1.2.a) \\
& \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j & = & d_i \quad i = p+1, \ldots, m & (1.2.b) \\
& x_j & \geq & 0 \quad j = 1, \ldots, q & (1.3) \\
\end{array}
$$

$$(x_j \text{ de signe quelconque }) \qquad j = q+1, \ldots, n$$

avec c_j, t_{ij}, d_i constantes et x_j variables.
(1.1) : fonction économique ou fonction objectif
(1.2) : contraintes réelles
(1.3) : contraintes de non-négativité (ou de restriction de signe).
Ces notations seront adoptées durant toute cette partie. Ainsi une fois pour toutes :

- il y aura n variables notées x_j $(j = 1, \ldots, n)$
- z représente la fonction à optimiser ; c_j est le coefficient de la variable x_j dans cette fonction z
- i $(i = 1, \ldots, m)$ est l'indice des m contraintes réelles (équations ou inéquations) ; t_{ij} et d_i représentent respectivement le coefficient de la variable x_j dans la contrainte i (appelé coefficient technologique) et le terme indépendant (ou second membre) de cette contrainte.

Les notations vectorielles suivantes seront indispensables :

$x = (x_1, \ldots, x_n)$	vecteur colonne $(n \times 1)$
$c = (c_1, \ldots, c_n)$	vecteur ligne $(1 \times n)$
$d = (d_1, \ldots, d_m)$	vecteur colonne $(m \times 1)$
$T = (t_{ij}; i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$	matrice $(m \times n)$
$\tau_i = (t_{i1}, \ldots, t_{in})$	vecteur ligne $(1 \times n)$ de la matrice T
$t_j = (t_{1j}, \ldots, t_{mj})$	vecteur colonne $(m \times 1)$ de la matrice T.

La forme générale ci-dessus s'écrit :

$$(LP) \qquad \begin{array}{rcll} \text{opt } z & = & cx & \\ \tau_i x & \begin{smallmatrix}\leq\\ \geq\end{smallmatrix} & d_i & i = 1, \ldots, p \\ \tau_i x & = & d_i & i = p+1, \ldots, m \\ x_j & \geq & 0 & j = 1, \ldots, q \end{array}$$

$$x_j \text{ de signe qcq} \qquad j = q+1, \ldots, n$$

Les hypothèses de la programmation linéaire sont implicites dans la formulation du modèle représenté par le problème ci-dessus ; elles seront néanmoins explicitées au paragraphe suivant dans le cadre de l'interprétation économique du modèle de la P.L.
Cette forme générale peut être simplifiée : il est en effet possible de ramener le problème à des formes plus compactes, mais équivalentes, en particulier aux formes dites "canonique" et "standard". Ces deux formes équivalentes seront utilisées abondamment dans la suite : la forme standard sera celle généralement utilisée pour la description des algorithmes (voir chapitres 2 et 4) ; la forme canonique sera particulièrement utile pour l'étude de la dualité (voir chapitre 3).
Tout d'abord, de manière évidente, il est toujours possible de ramener :

- l'optimisation à une minimisation [1] (maximiser la fonction z est équivalent à minimiser la fonction $-z$)
- toutes les inégalités (1.2.a) à des inégalités de même type (il suffit de les multiplier par -1, le cas échéant) : soit, par convention, des inégalités "supérieur ou égal" $(\geq)$
- toutes les variables à être non négatives. Une variable x_j de signe quelconque [2] peut-être décomposée
  - soit en deux variables non négatives

    $$x_j = x_j^+ - x_j^- \text{ avec } x_j^+ = \max\,(0, x_j) \text{ et } x_j^- = \max\,(0, -x_j)$$

    ce qui présente l'inconvénient de doubler le nombre de variables

1. Ce choix est arbitraire. La description de tous les algorithmes se fera sur base d'un problème de minimisation mais il sera immédiat ensuite de l'adapter à un problème de maximisation.

2. Soulignons qu'au niveau des applications, les variables représentent généralement des quantités physiques et qu'elles sont alors naturellement non négatives.

- soit en posant
$$x_j = x'_j - \bar{x} \text{ avec } x'_j \geq 0,\ \bar{x} \geq 0$$
ce qui n'introduit qu'une seule variable supplémentaire.

Définition 1.1 Forme canonique du problème (LP)
Pour obtenir cette forme équivalente, toutes les contraintes d'égalités (1.2.b) sont mises sous forme d'inégalité au prix du dédoublement suivant :

$$\tau_i x = d_i \qquad \leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcr} \tau_i x & \geq & d_i \\ -\tau_i x & \geq & -d_i \end{array} \right\}$$

En notation vectorielle, la forme canonique est donc :

$$(LP) \qquad \begin{array}{rcl} \min z & = & cx \\ Tx & \geq & d \\ x & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} (1.4) \\ (1.5) \\ (1.6) \end{array}$$

Définition 1.2 Forme standard du problème (LP)
Pour obtenir cette forme équivalente, toutes les contraintes d'inégalité (1.2.a) sont mises sous forme d'égalité par l'introduction de variables d'écart *non négatives :*

$$\begin{array}{lcll} \tau_i x \geq d_i & \leftrightarrow & \tau_i x - x_i^e = d_i & \text{et} \quad x_i^e \geq 0 \\ \tau_i x \leq d_i & \leftrightarrow & \tau_i x + x_i^e = d_i & \text{et} \quad x_i^e \geq 0 \end{array}$$

En notation vectorielle, la forme standard est donc :

$$(LP) \qquad \begin{array}{rcl} \min z & = & cx \\ Tx & = & d \\ x & \geq & 0 \end{array} \qquad (1.7)$$

Ces variables d'écart mesurent donc l'écart positif entre les premiers et les seconds membres des contraintes (1.2.a) ; T est appelée matrice technologique.

Illustration 1.1
Soit un problème sous la forme générale :

$$\begin{array}{rcrcl} \max\ x_1 & - & 4x_2 & & \\ x_1 & & & \leq & 7 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & \geq & 4 \\ x_1 & + & x_2 & = & 5 \\ x_1 & \geq & 0 & \text{et} & x_2 \text{ de signe qcq} \end{array}$$

En se ramenant à des variables non négatives, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ et en modifiant la notation $x_1 = x_1,\ x_2 = x_2^+,\ x_3 = x_2^-$, le problème devient :

$$\begin{array}{rcrcrcl} \max\ x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & & \\ x_1 & & & & & \leq & 7 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & \geq & 4 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ x_1 & \geq & 0, & x_2 & \geq 0, & x_3 & \geq\ 0 \end{array}$$

Ses formes canonique et standard sont respectivement :

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
\min & -x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & & \\
 & -x_1 & & & & & \geq & -7 \\
 & 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & \geq & 4 \\
 & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geq & 5 \\
 & -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & -5
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , x_2 \geq 0 \quad , x_3 \geq 0$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl}
\min & -x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & & & & \\
 & x_1 & & & & & + & x_4 & & = 7 \\
 & 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & & & - \ x_5 & = 4 \\
 & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & = 5
\end{array}$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, 5$$

(x_4 et x_5 sont des variables d'écart)

1.2 Applications et interprétation économique

1.2.1 Applications

La P.L. est la technique de Recherche Opérationnelle (R.O.) la plus utilisée ; ceci est dû à la facilité de la modélisation, à l'efficacité des algorithmes développés et à l'existence sur le marché de nombreux logiciels qui ont mis la P.L. à la portée de tous.
Les applications de la P.L. sont donc extrêmement nombreuses. Contentons-nous de citer les trois situations les plus classiques trouvées dans la littérature, en les illustrant par des exemples didactiques.

Application 1.1 : Problème de planification de production
Soient m machines $M_i \quad (i = 1, \ldots, m)$ qui fabriquent en série n types de produits $P_j \quad (j = 1, \ldots, n)$. La machine M_i a une capacité maximum de d_i unités de temps. La fabrication d'une unité du produit P_j nécessite l'utilisation de la machine M_i durant t_{ij} unités de temps.
Si c_j représente le gain relatif à la production d'une unité du produit P_j, la résolution du problème

$$\begin{array}{ll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
 & \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j \leq d_i \qquad i = 1, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0
\end{array}$$

fournira les valeurs optimales des quantités x_j à produire de chacun des produits ; la fonction économique représente le gain total ; le premier membre des contraintes réelles représente le temps total d'utilisation de chacune des machines ; les valeurs optimales des variables d'écart associées à chacune de ces contraintes correspondent au temps disponible non utilisé de chaque machine.

Illustration 1.2
Supposons
– 4 machines ; 5 produits
– des gains unitaires de production de (100 ; 75 ; 50 ; 25 ; 50)
– des capacités des machines en temps de (500 ; 800 ; 700 ; 900)
– des temps d'utilisation des machines pour la fabrication des produits

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
M_1	$4'$	–	$2'$	–	$4'$
M_2	$2'$	$3'$	–	–	$3'$
M_3	$3'$	–	$1'$	$4'$	–
M_4	–	$5'$	$4'$	$2'$	–

Le problème s'écrit

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrl}
\max & 100x_1 & + & 75x_2 & + & 50x_3 & + & 25x_4 & + & 50x_5 & \\
 & 4x_1 & & & + & 2x_3 & & & + & 4x_5 & \leq 500 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & & & & & + & 3x_5 & \leq 800 \\
 & 3x_1 & & & + & x_3 & + & 4x_4 & & & \leq 700 \\
 & & & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & & & \leq 900
\end{array}$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, 5$$

Application 1.2 : Problème de mélange (ou du problème diététique)
Cette application classique de la P.L. est généralement présentée sous la forme suivante : il s'agit de rechercher un régime alimentaire qui, tout en étant le meilleur marché possible, garantisse un apport suffisant en éléments nutritifs.
Soient n aliments de prix $c_j \quad (j = 1, \ldots, n)$ par unité ; m éléments nutritifs ; $t_{ij} \quad (i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n)$ la quantité du $i^{\text{ème}}$ élément nutritif contenue dans une unité du $j^{\text{ème}}$ aliment ; $d_i \quad (i = 1, \ldots, m)$ les besoins respectifs en les m éléments nutritifs.
Si les variables $x_1, \ldots, x_n$ représentent les quantités des divers aliments du régime, on obtient le problème :

$$\begin{array}{lll}
\min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
 & \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j & \geq d_i \quad i = 1, \ldots, m \\
 & x_j & \geq 0
\end{array}$$

Ce problème n'est rien d'autre qu'un problème de mélange. Il se présente dans de nombreuses situations ; une des plus fréquemment citées est celle de la constitution d'aliments pour animaux (voir [1] page 40). L'illustration suivante présente une autre situation de mélange.

Illustration 1.3
Une société charbonnière est tenue de fournir chaque mois à une centrale électrique un ensemble – appelé mélange – de différents charbons de façon
– à assurer un nombre Q de calories à la centrale
– à respecter trois contraintes de qualité du mélange relatives respectivement :
  – à la teneur maximale C en cendres
  – à la teneur maximale H en eau

– à la teneur minimale V en matières volatiles

L'entreprise possède dix types de charbon, en quantités disponibles d_i $(i = 1, ..., 10)$.
Soit, pour chaque type i de charbon et par milliers de tonnes,
q_i le nombre de calories ;
c_i la teneur en cendres ;
h_i la teneur en eau ;
v_i la teneur en matières volatiles.
Si p_i représente le profit réalisé par la vente d'un millier de tonnes de charbon de type i, le problème de la maximisation du profit de la société charbonnière s'écrit

$$
\begin{array}{llll}
\max & \sum_{i=1}^{10} p_i x_i & & \\
 & \sum_{i=1}^{10} q_i x_i \geq Q & & \\
 & \sum_{i=1}^{10} c_i x_i \leq C & (\sum_{i=1}^{10} x_i) & \\
 & \sum_{i=1}^{10} h_i x_i \leq H & (\sum_{i=1}^{10} x_i) & \\
 & \sum_{i=1}^{10} v_i x_i \geq V & (\sum_{i=1}^{10} x_i) & \\
 & x_i \leq d_i & & i = 1, ..., 10 \\
 & x_i \geq 0 & & i = 1, ..., 10
\end{array}
$$

où x_i représente, en milliers de tonnes, la quantité de charbon i incluse dans le mélange.

Application 1.3 : Problème de transport

Soient r centres de production (ou dépôts) d'un bien donné possédant des stocks disponibles en quantités respectives $q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_r$. Dans s centres de consommation, la demande de ce bien est respectivement de $d_1, \ldots, d_j, \ldots, d_s$. Les frais (ou coûts) de transport d'une unité de bien du centre i à la $j^{\text{ème}}$ destination est c_{ij}. Il s'agit de déterminer comment approvisionner les centres de consommation à partir des centres de production de manière à minimiser le coût total de transport.
Les variables x_{ij} $(i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, s)$ du problème représentent les quantités de bien transportées du centre de production i au centre de consommation j. Le problème s'écrit :

$$
\begin{array}{llll}
\min & \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c_{ij} x_{ij} & & \\
 & \sum_{j=1}^{s} x_{ij} \leq q_i & i = 1, \ldots, r \\
 & \sum_{i=1}^{r} x_{ij} \geq d_j & j = 1, \ldots, s \\
 & x_{ij} \geq 0 & &
\end{array}
$$

Les deux ensembles de contraintes représentent respectivement le respect des quantités disponibles dans les r centres de production et la satisfaction des demandes en les s centres de consommation.

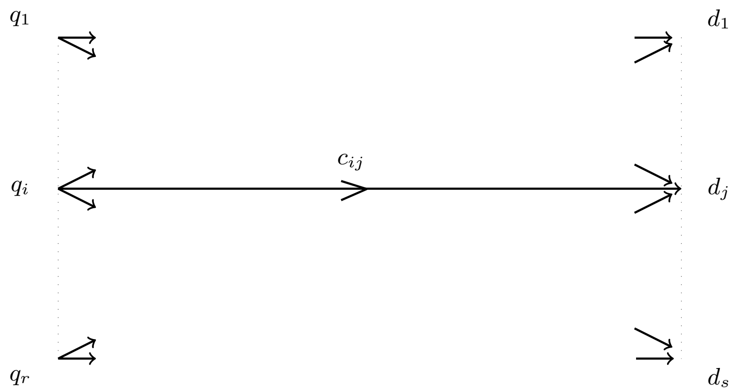

FIGURE 1.1 – Problème de transport

Remarques

1. Le problème de transport contient rs variables et $r+s$ contraintes ; par ailleurs la matrice technologique T, de dimension $(r+s;\ rs)$ possède une structure particulière : chaque variable x_{ij} n'intervient que deux fois dans les contraintes réelles, à savoir dans les deux contraintes relatives au centre de production i et au centre de consommation j, et avec un coefficient égal à 1.

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} & x_{21} & \dots & \dots & x_{rs} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ r \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ s \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & & & \vdots & & & \\ & \vdots & & & & & & \\ & & & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

2. A l'évidence
   – le problème n'aura de solution que dans la mesure où la quantité totale disponible permet de satisfaire la demande totale :

$$\sum_{i=1}^{r} q_i \quad \geq \quad \sum_{j=1}^{s} d_j$$

– il ne sera pas optimal d'apporter au centre de consommation j plus de d_j unités ; il n'est donc pas restrictif d'imposer :

$$\sum_{i=1}^{r} x_{ij} = d_j \quad j = 1, \ldots, s$$

Aussi, en créant un centre de consommation supplémentaire fictif $s+1$, absorbant, à un coût de transport nul, le surplus de matière disponible

$$d_{s+1} = \sum_{i=1}^{r} q_i - \sum_{j=1}^{s} d_j$$

$$c_{i,s+1} = 0 \qquad i = 1, \ldots, r$$

le problème de transport peut s'écrire :

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s+1} c_{ij} x_{ij} & \\ & \sum_{j=1}^{s+1} x_{ij} = q_i & i = 1, \ldots, r \\ & \sum_{i=1}^{r} x_{ij} = d_j & j = 1, \ldots, \mathbf{s+1} \\ & x_{ij} \geq 0 & \end{array}$$

3. Généralement les quantités q_i et d_j sont entières et il apparaît naturel d'imposer que les variables x_{ij} le soient également. On obtient ainsi un problème de P.L. en variables entières (voir partie II).
Toutefois étant donné la structure particulière de la matrice T – elle est totalement unimodulaire (voir définition 7.4) –, il est assuré (voir propriété 7.2) que, même sans imposer cette restriction d'intégralité des variables, il existe une solution optimale du problème de transport pour laquelle toutes les variables x_{ij} prennent des valeurs entières.
La structure particulière du problème de transport permet de développer des algorithmes spécifiques à ce problème : l'un d'entre eux est décrit au chapitre 5.

Illustration 1.4
Soient
– cinq dépôts avec des quantités disponibles (7 ; 6 ; 8 ; 10 ; 8) ;
– six centres de consommation avec des demandes de (9 ; 6 ; 7 ; 8 ; 4 ; 5) ;
– la matrice des coûts de transport entre les dépôts i et les centres de consommation j.

$i\backslash j$						
	9	12	9	6	9	10
	6	8	9	11	3	11
	7	3	11	2	3	10
	6	8	7	10	3	5
	5	6	9	2	7	3

le problème de transport s'écrit :