

# Table des matières

<b>Avant-Propos</b>	<b>3</b>
<b>Notations et abréviations</b>	<b>10</b>
<b>I Intégration</b>	<b>11</b>
1 Initiation à l'intégrale de Lebesgue . . . . .	11
1.1 Notion de mesure . . . . .	11
1.2 Intégration au sens de Lebesgue . . . . .	13
1.3 Lien avec l'intégrale de Riemann . . . . .	16
1.4 Espaces $L^1$ et $L^2$ . . . . .	18
2 Théorèmes de convergence sous le signe somme . . . . .	21
2.1 Le théorème de convergence dominée et ses conséquences . . . . .	21
2.2 Théorème de convergence monotone . . . . .	24
3 Intégrales multiples . . . . .	26
3.1 Théorème de Fubini . . . . .	26
3.2 Changement de variables . . . . .	27
4 Exercices corrigés . . . . .	28
<b>II Éléments de théorie des distributions</b>	<b>34</b>
1 L'idée de départ . . . . .	34
2 Définition des distributions - Premiers exemples . . . . .	38
2.1 Fonctions tests . . . . .	38
2.2 Définition d'une distribution . . . . .	39
2.3 Exemples de distributions . . . . .	40
3 Opérations sur les distributions . . . . .	44
3.1 Addition et produit par un scalaire . . . . .	44
3.2 Translation . . . . .	45
3.3 Symétrisation . . . . .	46
3.4 Multiplication par une fonction . . . . .	47
3.5 Dérivation . . . . .	48
4 Suites et séries de distributions . . . . .	52
5 Support des distributions . . . . .	54
5.1 Définitions et exemples . . . . .	54
5.2 Distributions à support borné . . . . .	55
6 Exercices corrigés . . . . .	56
<b>III Convolution des fonctions</b>	<b>61</b>
1 Définition et propriétés élémentaires de la convolution . . . . .	61
1.1 Définition et commutativité . . . . .	61
1.2 Intérêt pratique : systèmes de convolution . . . . .	62

1.3	Distributivité et invariance temporelle . . . . .	62
2	Conditions d'existence du produit de convolution . . . . .	63
2.1	$f$ et $g$ sont localement intégrables et $f$ est à support compact . . . . .	63
2.2	$f$ est bornée et $g$ est intégrable . . . . .	64
2.3	$f$ et $g$ sont de carré intégrable . . . . .	66
2.4	$f$ est intégrable et $g$ est de carré intégrable . . . . .	66
2.5	$f$ et $g$ sont intégrables . . . . .	66
2.6	$f$ et $g$ sont causales et localement intégrables . . . . .	68
3	Régularité du produit de convolution . . . . .	70
3.1	Continuité . . . . .	70
3.2	Dérivabilité . . . . .	70
3.3	Suites régularisantes . . . . .	71
4	Exercices corrigés . . . . .	72
<b>IV</b>	<b>Transformation de Fourier des fonctions</b>	<b>75</b>
1	Définitions et propriétés . . . . .	75
1.1	Définition de la transformation de Fourier dans $L^1$ . . . . .	75
1.2	Continuité de la T.F. et lemme de Riemann-Lebesgue . . . . .	76
1.3	L'opérateur de Fourier . . . . .	77
1.4	Propriétés élémentaires . . . . .	77
2	Transformation de Fourier et dérivation . . . . .	78
2.1	Dérivée de la T.F. . . . .	78
2.2	T.F. de la dérivée . . . . .	79
3	Inversion de la transformation de Fourier . . . . .	81
3.1	Problématique de l'inversion de la transformation de Fourier . . . . .	81
3.2	Inversion de la transformation de Fourier dans $L^1$ . . . . .	82
3.3	Cas d'échec du théorème d'inversion. . . . .	83
3.4	Formule d'inversion pour les autres définitions de la T.F. . . . .	84
3.5	Utilisation de la symétrie de la formule d'inversion . . . . .	85
3.6	Interprétation physique de la formule d'inversion . . . . .	85
3.7	Relation d'incertitude . . . . .	85
4	Transformation de Fourier et convolution . . . . .	87
5	La transformation de Fourier dans $L^2$ . . . . .	88
5.1	La formule d'échange . . . . .	88
5.2	La formule de Parseval-Plancherel . . . . .	88
5.3	Extension de la transformation de Fourier à $L^2$ . . . . .	90
6	Calcul numérique des transformées de Fourier . . . . .	92
7	Exercices corrigés . . . . .	94
<b>V</b>	<b>Convolution et transformation de Fourier des distributions</b>	<b>99</b>
1	Convolution des distributions . . . . .	99
1.1	Où nous découvrons la définition de la convolution des distributions . . . . .	99
1.2	Condition sur les supports . . . . .	101
1.3	Convolution par une distribution à support borné . . . . .	102
1.4	Convolution de distributions causales . . . . .	104
1.5	Convolution de distributions régulières sans condition sur les supports . . . . .	105
1.6	Associativité du produit de convolution . . . . .	106
1.7	Algèbres de convolution . . . . .	107
1.8	Convolution et impulsions approchées . . . . .	108
2	Transformation de Fourier des distributions tempérées . . . . .	108
2.1	Où nous découvrons la définition de la T.F. des distributions . . . . .	109

2.2	L'espace de Schwartz . . . . .	109
2.3	Les distributions tempérées et leurs transformées de Fourier . . . . .	111
2.4	Inversion de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$ . . . . .	115
2.5	Transformation de Fourier et dérivation des distributions . . . . .	117
2.6	Transformation de Fourier et convolution des distributions . . . . .	119
2.7	Suites et séries de distributions tempérées . . . . .	121
2.8	Transformée de Fourier du peigne de Dirac . . . . .	123
2.9	Formule sommatoire de Poisson . . . . .	124
2.10	Théorème d'échantillonnage de Shannon . . . . .	125
2.11	La transformation de Hilbert . . . . .	128
3	Exercices corrigés . . . . .	133
<b>VI</b>	<b>Fonctions orthogonales</b>	<b>142</b>
1	Produit scalaire . . . . .	142
1.1	Définitions et exemples . . . . .	142
1.2	Inégalités de Schwarz et de Minkowski . . . . .	144
1.3	Norme associée à un produit scalaire . . . . .	144
1.4	Orthogonalité . . . . .	146
1.5	Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt . . . . .	147
2	L'espace de Hilbert $L^2_s(J)$ . . . . .	149
3	Meilleure approximation en moyenne quadratique . . . . .	151
3.1	Définition et théorème de projection . . . . .	151
3.2	Méthode de Gram . . . . .	151
3.3	Coefficients de Fourier relativement à une famille orthogonale . . . . .	154
3.4	Inégalité de Bessel . . . . .	156
4	Développement sur une base hilbertienne . . . . .	157
4.1	Problématique . . . . .	157
4.2	Base hilbertienne . . . . .	158
4.3	Égalité de Parseval . . . . .	158
5	Polynômes orthogonaux . . . . .	160
5.1	Existence d'une suite orthogonale de polynômes de degré croissant . . . . .	160
5.2	Polynômes de Legendre . . . . .	161
5.3	Polynômes de Tchebychev . . . . .	164
5.4	Polynômes de Laguerre . . . . .	165
5.5	Polynômes d'Hermite . . . . .	166
6	Exercices corrigés . . . . .	167
<b>VII</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>182</b>
1	Convergence des séries de Fourier en moyenne quadratique . . . . .	182
1.1	L'espace de Hilbert $L^2_T$ . . . . .	183
1.2	Les familles orthogonales totales de signaux sinusoïdaux . . . . .	185
1.3	Développements en série de Fourier . . . . .	186
1.4	Étude d'un exemple. . . . .	189
2	Convergence ponctuelle des séries de Fourier . . . . .	192
2.1	Théorème de Dirichlet . . . . .	192
2.2	Cas d'échec du théorème de Dirichlet - théorème de Jordan . . . . .	194
2.3	Phénomène de Gibbs . . . . .	195
2.4	Intégration des développements en série de Fourier . . . . .	195
2.5	Dérivation des développements en série de Fourier . . . . .	197
2.6	Rapidité de décroissance des coefficients de Fourier . . . . .	199
3	Développements en série trigonométrique de fonctions non périodiques . . . . .	201

3.1	Développement en série trigonométrique sur un intervalle borné . . . . .	201
3.2	Développement en cosinus sur un intervalle $[0, a]$ . . . . .	201
3.3	Développement en sinus sur un intervalle $[0, a]$ . . . . .	201
4	Développement en série de Fourier des distributions périodiques . . . . .	203
4.1	Transformée de Fourier d'une distribution périodique . . . . .	203
4.2	Développement en série de Fourier d'une distribution périodique . . . . .	204
4.3	Dérivation d'une série de Fourier au sens des distributions . . . . .	205
5	Exercices corrigés . . . . .	206
<b>VIII</b>	<b>Introduction à la théorie des ondelettes</b>	<b>223</b>
1	Quand la transformation de Fourier ne suffit plus... . . . . .	223
2	Transformée de Fourier à fenêtre glissante . . . . .	224
3	Transformée en ondelettes . . . . .	227
4	Développement en ondelettes orthogonales . . . . .	232
5	Exercices corrigés . . . . .	234
<b>IX</b>	<b>Fonctions de la variable complexe</b>	<b>235</b>
1	Dérivabilité par rapport à la variable complexe . . . . .	235
1.1	Fonctions $\mathbb{C}$ -différentiables . . . . .	235
1.2	Propriétés algébriques de la dérivation . . . . .	238
1.3	Dérivation d'une fonction composée . . . . .	239
1.4	Dérivation d'une fonction réciproque . . . . .	240
2	Conditions d'holomorphic . . . . .	240
2.1	Conditions de Cauchy . . . . .	240
2.2	Autre écriture des conditions de Cauchy . . . . .	242
2.3	Utilisation du système de représentation $(z, \bar{z})$ . . . . .	242
3	Fonctions holomorphes usuelles . . . . .	244
3.1	La fonction exponentielle . . . . .	244
3.2	Fonctions $\sin, \cos, \sinh, \cosh, \tan, \tanh$ . . . . .	245
3.3	Fonction racine $n$ -ième . . . . .	247
3.4	Fonction logarithme complexe . . . . .	250
3.5	Fonction puissance . . . . .	255
4	Fonctions analytiques . . . . .	256
4.1	Définition et résultats fondamentaux . . . . .	256
4.2	Principe du prolongement analytique . . . . .	259
4.3	Développements en série entière usuels . . . . .	261
5	Exercices corrigés . . . . .	265
<b>X</b>	<b>Intégration des fonctions holomorphes</b>	<b>275</b>
1	Intégrale curviligne . . . . .	275
1.1	Chemins . . . . .	275
1.2	Intégrale curviligne d'une fonction continue . . . . .	278
1.3	Longueur d'un chemin . . . . .	279
1.4	Majoration d'une intégrale curviligne . . . . .	280
2	Théorème et formule de Cauchy . . . . .	281
2.1	Notion d'homotopie . . . . .	281
2.2	Théorème de Cauchy . . . . .	284
2.3	Primitives des fonctions de la variable complexe . . . . .	287
2.4	Formule de Cauchy . . . . .	290
2.5	Analyticité des fonctions holomorphes . . . . .	292
2.6	Autres conséquences de la formule de Cauchy . . . . .	296

3	Développement en série de Laurent - Points singuliers . . . . .	298
3.1	Développement en série de Laurent . . . . .	298
3.2	Points singuliers isolés . . . . .	301
4	Théorème des résidus . . . . .	305
4.1	Résidu . . . . .	305
4.2	Calcul pratique d'un résidu . . . . .	305
4.3	Théorème des résidus . . . . .	308
5	Application au calcul de certaines intégrales . . . . .	309
5.1	Intégrale de la forme $\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos \theta, \sin \theta)}{Q(\cos \theta, \sin \theta)} d\theta$ . . . . .	309
5.2	Lemmes de Jordan . . . . .	310
5.3	Transformée de Fourier d'une fraction rationnelle . . . . .	312
5.4	Intégrales de Fourier semi-convergentes . . . . .	315
5.5	Intégrale du sinus-cardinal . . . . .	317
5.6	Transformée de Fourier d'une gaussienne . . . . .	319
5.7	Intégrales de la forme $\int_0^{+\infty} F(x)x^\alpha dx$ . . . . .	320
5.8	Intégrales de la forme $\int_0^{+\infty} F(x) \ln x dx$ . . . . .	323
6	Exercices corrigés . . . . .	325
<b>XI</b>	<b>Fonctions analytiques en analyse de Fourier</b>	<b>338</b>
1	Fonctions analytiques et séries de Fourier . . . . .	338
1.1	Série de Laurent et série de Fourier . . . . .	338
1.2	Coefficients de Fourier des fonctions périodiques analytiques . . . . .	339
2	Fonctions holomorphes définies par une intégrale . . . . .	340
2.1	Holomorphie d'une fonction définie par une intégrale. . . . .	340
2.2	La fonction $\Gamma$ . . . . .	341
2.3	T.F. d'une « gaussienne de module 1 » . . . . .	342
2.4	Base hilbertienne des polynômes d'Hermite . . . . .	344
3	Transformation de Laplace . . . . .	345
3.1	Transformée de Laplace bilatérale . . . . .	345
3.2	Transformée de Laplace des distributions à support borné . . . . .	347
3.3	Transformée de Laplace monolatérale . . . . .	348
3.4	Inversion de la transformation de Laplace . . . . .	352
4	Transformation en $z$ . . . . .	355
4.1	Définitions et propriétés . . . . .	355
4.2	Inversion de la transformation en $z$ . . . . .	358
5	Exercices corrigés . . . . .	360
	<b>Annexes</b>	<b>366</b>
<b>A</b>	<b>Topologie - Continuité</b>	<b>366</b>
1	Topologie de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	366
2	Fonctions continues . . . . .	369
<b>B</b>	<b>Fonctions différentiables</b>	<b>371</b>
1	Différentiabilité . . . . .	371
2	Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	374
	<b>Index</b>	<b>376</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>378</b>