Chapitre 1- Limites d'une fonction.

I. Essentiel.

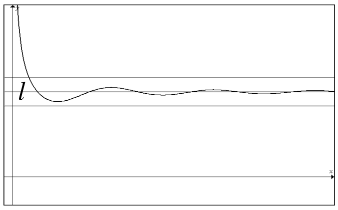
1. Limite finie à l'infini.

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type]a; +∞[. Soit l un réel.

Définition.

La fonction f admet l pour limite en +∞ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

On note: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$



De même:

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type]-∞;a[. Soit l un réel.

Définition.

La fonction f admet l pour limite en -∞ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est négatif et suffisamment grand en valeur absolue.

On note: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

Interprétation graphique.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$, la courbe représentative de la fonction f admet la droite d'équation $y = l$ comme **asymptote horizontale**.

- **Limites de fonctions usuelles** (à connaître).

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

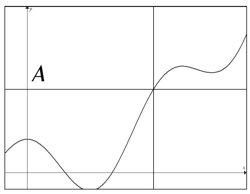
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$ (pour tout entier naturel n non nul).

2. Limite infinie à l'infini.

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type]a; +∞[.

Définition

La fonction f admet pour limite +∞ (respectivement -∞) en +∞ si, quel que soit le réel A, l'intervalle]A;+∞[(respectivement l'intervalle]-∞; A[) contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.



On note: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

De même:
Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty;a[$.

Définition.

La fonction f admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en $-\infty$ si, quel que soit le réel A, l'intervalle $]A;+\infty[$ (respectivement l'intervalle $]-\infty;A[$) contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est négatif et suffisamment grand en valeur absolue.

On note: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

- **Limites des fonctions usuelles** (à connaître):

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ (pour tout entier naturel $n > 0$).

n est impair $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

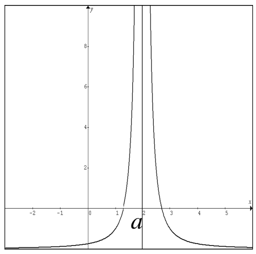
n est pair $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Remarque: certaines fonctions n'ont pas de limite à l'infini, comme les fonctions sinus et cosinus.

3. Limite infinie en un point.

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et a une borne ouverte de E.



Définition.

La fonction f admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en a si, quel que soit le réel A, l'intervalle $]A;+\infty[$ (respectivement l'intervalle $]-\infty;A[$) contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a.

On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Remarque:
On est parfois amené à séparer les cas : $x < a$ et $x > a$.
On note alors : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Interprétation graphique.

Quand $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, la courbe représentative de la fonction admet la droite d'équation $x = a$ comme **asymptote verticale**.

- **Limites des fonctions usuelles** (à connaître):

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$

n est pair: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

n est impair: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$

4. Limites et opérations.

Dans ce paragraphe, f et g sont deux fonctions définies sur un même ensemble E. α représente soit un réel, soit +∞, soit -∞.

a. Somme de deux fonctions.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)+g(x))$
l	l'	$l+l'$
l	+∞	+∞
l	-∞	-∞
+∞	+∞	+∞
-∞	-∞	-∞
+∞	-∞	On ne peut pas conclure

La dernière ligne est une ***forme indéterminée***, ce qui signifie qu'il faut effectuer des calculs ou transformations d'écriture avant de pouvoir conclure. Cela ne signifie pas que la fonction n'a pas de limite.

b. Produit de deux fonctions.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\mapsto\alpha}(f(x)\times g(x))$
l	l'	ll'
$l\neq 0$	+∞	+∞ ou -∞(suivant le signe de l)
$l\neq 0$	-∞	+∞ ou -∞(suivant le signe de l)
+∞	+∞	+∞
+∞	-∞	-∞
-∞	-∞	+∞
0	+∞ ou -∞	On ne peut pas conclure

On remarque qu'il y a aussi une ***forme indéterminée***.

c. Quotient de deux fonctions.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$.
l	$l'\neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	-∞ ou +∞	0
$l\neq 0$	0	-∞ ou +∞ (en fonction du signe de $\frac{f}{g}$)
0	0	On ne peut pas conclure
-∞ ou +∞	l'	-∞ ou +∞ (en fonction du signe de $\frac{f}{g}$)
-∞ ou +∞	-∞ ou +∞	On ne peut pas conclure

On remarque dans ce tableau deux nouvelles ***formes indéterminées***.

- **Les formes indéterminées.**

Il existe donc, entre autres, 4 formes indéterminées, c'est à dire des formes où le résultat n'apparait pas directement. Il convient dans ces cas-là de procéder à des transformations d'écriture permettant de lever l'indétermination ou permettant d'utiliser un résultat connu.

- **Limites à l'infini de fonctions polynômes.**

Pour déterminer la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ d'une fonction polynôme, on peut mettre en facteur la puissance de plus haut degré.
La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) est égale à la limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) du terme de plus haut degré.

- **Limites à l'infini de fonctions rationnelles.**

Pour déterminer la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ d'une fonction rationnelle, on met en facteur au numérateur et au dénominateur le terme de plus haut degré.
La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) est égale à la limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exercices de 2 à 6 p 11

d. Limites d'une fonction composée.

Soit f est une fonction définie sur E et g une fonction définie sur E' tel que, pour tout $x \in \mathrm{E}, f(x) \in \mathrm{E'}$
α, β et γ sont soit des réels, soit $-\infty$, soit $+\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{x \to \beta} g(x) = \gamma$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g\left(f(x)\right) = \gamma$.

Exercices de 7 à 8 p 12

5. Limites et comparaison.

α est soit un réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$.

Théorèmes de comparaison :

Si, au voisinage de α, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$.
Si, au voisinage de α, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.

Théorème dit "théorème des gendarmes"

Si, au voisinage de α, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l$.

Théorème de comparaison des limites.

Si, au voisinage de α, $f(x) \geq g(x)$, si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l$ et si $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = l'$ alors $l \geq l'$.

Exercices de 11 à 12 p 13

II. Exercices et problèmes.

1. Exercices d'application du cours.

Exercice 1

Déterminer les limites des fonctions suivantes en -∞ et en +∞.

a) $f(x)=x^3$

b) $g(x)=-3x^4$

c) $h(x)=\dfrac{2}{x^2}$

d) $k(x)=\dfrac{3}{x^3}$

Méthode: utiliser les limites des fonctions usuelles.

Exercice 2

Déterminer les limites des fonctions suivantes en -∞ et en +∞.

a) $f(x)=-2x^2+x-1$

b) $g(x)=0,5x^3+4x-7$

c) $h(x)=\dfrac{4}{3}x^5-3x^4+\dfrac{7}{2}x^2-1$

d) $k(x)=-\sqrt{5}x^3+2x^2-5x+8$

Méthode: factoriser le terme de plus haut degré ou utiliser les limites des fonctions polynômes.

Exercice 3

Déterminer les limites des fonctions suivantes en -∞ et en +∞.

a) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+5}$

b) $g(x)=\dfrac{2x-1}{3x^2-5}$

c) $h(x)=\dfrac{3x^2-2x-2}{x^4+5x^2-1}$

d) $k(x)=\dfrac{-2x^3+4x^2-1}{3x^3-2x+2}$

e) $i(x)=\dfrac{3x^2-2x-2}{5x^2+x+6}$

f) $j(x)=\dfrac{-2x^3+3x^2-12x-1}{7x^2+3x+2}$

Méthode: factoriser le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur ou utiliser les limites des fonctions rationnelles.

Exercice 4

La fonction *f* est définie sur R\{2} par: $f(x)=\dfrac{4}{x-2}$

a) Déterminer les limites de *f* en -∞ et en +∞.
b) Préciser le signe de $f(x)$ en fonction de x.
c) Déterminer les limites suivantes: $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$.
d) Montrer que la courbe représentative de *f* admet deux asymptotes.
Méthode: utiliser les limites d'un quotient dont le dénominateur tend vers 0.

Exercice 5

La fonction *f* est définie sur R\{-2} par: $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+2}$.

a) Déterminer les limites de *f* en -∞ et en +∞.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-2}(2x+5)$ et $\lim\limits_{x\to-2}(x+2)$. Préciser le signe de ($x$+2) en fonction de x.

c) En déduire les limites suivantes: $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)$.

d) Montrer que la courbe représentative de f admet deux asymptotes.

Méthode: utiliser les limites d'un quotient dont le dénominateur tend vers 0.

Exercice 6.

Déterminer la limite en a (on sera amené éventuellement à distinguer les cas: $x < a$ et $x > a$) de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ $a = 2$

b) $g(x)=\dfrac{x+7}{x^2-4}$ $a = -2$

c) $h(x)=\dfrac{5x-3}{x^2-3x+2}$ $a = 1$

d) $k(x)=\dfrac{x^2+7x-1}{-2x^2+3x+2}$ $a = 2$

Méthode: utiliser les limites de quotients quand le dénominateur tend vers 0.

Exercice 7

Déterminer la limite en -∞ et en +∞ de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x)=(4x-3)^3$

b) $g(x)=\sqrt{\dfrac{5x-2}{x+3}}$

c) $h(x)=\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)^2$

d) $k(x)=\sqrt{x^2-5x+2}$

Méthode: utiliser les limites de fonctions composées.

Exercice 8

Déterminer la limite en a de chacune des fonctions suivantes (on sera amené éventuellement à distinguer les cas: $x < a$ et $x > a$)

a) $f(x)=\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^2$ $a = 2$

b) $g(x)=\left(\dfrac{2x+7}{x-3}\right)^3$ $a = 3$

Méthode: utiliser les limites de fonctions composées.

Exercice 9

Déterminer la limite en a de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x)=x-\sqrt{x-2}$ $a=+\infty$

b) $g(x)=2x+\sqrt{1-x}$ $a=-\infty$

c) $h(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x+4}$ $a=+\infty$

d) $h(x)=\sqrt{x^2-3x}-x$ $a=+\infty$

Méthode: factoriser ou multiplier le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée pour lever l'indétermination.

Exercice 10

Déterminer la limite en a de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2}$ $a=2$

b) $g(x)=\dfrac{\sqrt{5x-1}-2}{x^2-5x+4}$ $a=1$

Méthode: multiplier le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée pour lever l'indétermination.

Exercice 11

La fonction f est définie sur R par: $f(x) = 3x + 1 - \sin(2x)$.
1) Montrer que, pour tout réel x, on a: $3x \le f(x) \le 3x+2$.
2) En déduire les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$.
Méthode: utiliser les théorèmes de comparaison.

Exercice 12

La fonction f est définie sur R\{0} par: $f(x) = \dfrac{2+\sin(x)}{x}$.

1) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a: $\dfrac{1}{x} \le f(x) \le \dfrac{3}{x}$.

2) Montrer que, pour tout réel x strictement négatif, on a: $\dfrac{3}{x} \le f(x) \le \dfrac{1}{x}$.

3) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Méthode: utiliser le théorème des gendarmes.

2. Corrigés des exercices 1 à 12.

Exercice 1

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 0$

Exercice 2

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = -\infty$

Exercice 3

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{3x^2} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{3x^2} = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{x^4} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{x^4} = 0$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3}{3x^3} = -\dfrac{2}{3}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3}{3x^3} = -\dfrac{2}{3}$.

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} i(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{5x^2} = \dfrac{2}{5}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{5x^2} = \dfrac{2}{5}$.

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} j(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3}{7x^2} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} j(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3}{7x^2} = -\infty$.

Exercice 4

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0$

b) $f(x) > 0$ si $x > 2$ et $f(x) < 0$ si $x < 2$.

c) On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$.

D'où: $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

d) Les droites d'équation $x = 2$ et $y = 0$ sont asymptotes à la courbe.

Exercice 5

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

b) $\lim\limits_{x \to -2} (2x+5) = 1$ $\lim\limits_{x \to -2} (x+2) = 0$

$f(x) > 0$ si $x > -2$ et $f(x) < 0$ si $x < -2$.

c) D'où: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to +2 \\ x>+2}} f(x) = +\infty$.

d) Les droites d'équation $x = -2$ et $y = 2$ sont asymptotes à la courbe.

Exercice 6

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3) = 1$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} (x-2) = 0^-$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} (x-2) = 0^+$

d'où: $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to -2} (x+7) = 5$ $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} (x^2 - 4) = 0^-$

d'où: $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} g(x) = -\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to 1} (5x-3) = 2$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (x^2 - 3x + 2) = 0^+$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (x^2 - 3x + 2) = 0^-$

d'où: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} h(x) = -\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 7\text{x} - 1) = 17$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} (-2x^2 + 3x + 2) = 0^+$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} (-2x^2 + 3x + 2) = 0^-$

d'où: $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} k(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} k(x) = -\infty$.

Exercice 7

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (4x-3) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (4x-3)^3 = +\infty$; de même: $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x-3)^3 = -\infty$.

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x-2}{x+3} = 5 \\ \lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x} = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{5x-2}{x+3}} = \sqrt{5}$; de même $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{5x-2}{x+3}} = \sqrt{5}$.