Rappels de cours

Le concours ACCÈS étant ouvert à toutes les filières, il est logique qu'un élève de Terminale L possède les connaissances nécessaires pour réussir l'épreuve de mathématiques : il n'est donc pas indispensable d'être « callé » sur tous les domaines abordés en Terminale S par exemple. Typiquement, les limites de suites, les nombres complexes, la géométrie analytique et vectorielle ou encore la trigonométrie, ne tombent pas. Ces rappels de cours ne sont donc pas exhaustifs par rapport à ce qu'un élève de filière scientifique peut avoir l'habitude de voir, mais permettent de couvrir l'ensemble des connaissances nécessaires à la bonne réussite du concours.

La première partie de l'épreuve comporte donc des exercices basés sur des calculs assez simples et des connaissances assez générales : il faut cependant garder en tête que celle-ci est très longue, et donc qu'il faut mener à bien ces calculs avec une grande rapidité. Il est donc impératif de connaître parfaitement les règles et méthodes de calcul qui sont développées dans la première partie des rappels de cours : divisibilité, utilisation des identités remarquables, pourcentages, résolutions de systèmes d'équation, géométrie, et surtout un certain sens de la logique.

Dans la deuxième partie de l'épreuve, on trouve quelques exercices plus calculatoires, qui permettent d'évaluer les connaissances du candidat sur l'analyse fonctionnelle : ensemble de définition, dérivation et intégration, sens de variations, limites, étude des fonctions courantes (inverse, racine carrée, exponentielle, logarithme…). On y trouve également en général un exercice traitant des probabilités conditionnelles, ce point de cours sera donc rappelé.

Il est vivement conseillé, avant d'attaquer la résolution d'un sujet, de parcourir la totalité de ces rappels de cours, notamment en s'attardant sur les nombreux exemples donnés, qui permettent une bonne compréhension des situations rencontrées en pratique lors de l'épreuve.

Une bonne idée, qui a toujours assez bien fonctionné pour les réticents à l'apprentissage des formules, peut être de synthétiser ces quelques formules sous forme de fiches, à poser sur le mur de sa chambre ou sur son bureau : une remise en mémoire quotidienne permet une bonne assimilation des formules et des théorèmes. Et cela va sans dire, il est indispensable de connaître les dérivées et primitives usuelles par exemple…

1. Bases de calcul

➨ ***Critères de divisibilité***

(i) Critère de divisibilité par 2

Un nombre entier est divisible par 2 lorsqu'il est pair

Un nombre entier est divisible par 2 lorsque son chiffre des unités est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.

(ii) Critère de divisibilité par 3

Un nombre entier est divisible par 3 lorsque la somme des chiffres qui composent son écriture est divisible par 3.

(iii) Critère de divisibilité par 4.

Un nombre entier est divisible par 4 lorsque le nombre formé par les deux derniers chiffres de son écriture est divisible par 4.

(iv) Critère de divisibilité par 5

Un nombre entier est divisible par 5 lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5.

(v) Critère de divisibilité par 6

Un nombre entier est divisible par 6 lorsqu'il est divisible à la fois par 2 et par 3.

(vi) Critère de divisibilité par 8

Un nombre entier est divisible par 8 lorsque le nombre formé par ses 3 derniers chiffres est divisible par 8.

(vii) Critère de divisibilité par 9

Un nombre entier est divisible par 9 lorsque la somme des chiffres qui composent son écriture est divisible par 9.

(viii) Critère de divisibilité par 10

Un nombre entier est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

(ix) Critère de divisibilité par 11

Pour déterminer si un nombre N est divisible par 11 :

- on calcule la somme A des chiffres en position impaire.
- on calcule la somme B des chiffres en position paire.

N est divisible par 11 si et seulement si la différence A – B (ou B – A) est divisible par 11.

Cela revient à effectuer la somme alternée de ses chiffres.

(x) Critère de divisibilité par 12

Un nombre entier est divisible par 12 lorsqu'il est divisible à la fois par 3 et par 4.

(xi) Critère de divisibilité par 15

Un nombre entier est divisible par 15 lorsqu'il est divisible à la fois par 3 et par 5.

(xii) Critère de divisibilité par 20

Un nombre entier est divisible par 20 lorsque les deux derniers chiffres de son écriture sont : 00 20 40 60 80

(xiii) Critère de divisibilité par 25

Un nombre est divisible par 25 lorsque les deux derniers chiffres de son écriture sont : 00 25 50 75

(xiv) Critère de divisibilité par 50

Un nombre entier est divisible par 50 lorsque les deux derniers chiffres de son écriture sont : 00 50

(xv) Critère de divisibilité par 100

Un nombre entier est divisible par 100 lorsque les deux derniers chiffres de son écriture sont : 00

➨ *Astuces pour le calcul mental*

(i) Multiplication par 5

Pour multiplier un nombre par 5, il suffit de rajouter 0 à droite et de diviser ensuite par 2.

(ii) Multiplication par 11

Pour multiplier un nombre à deux chiffres par 11, il suffit de placer la somme de ces deux chiffres entre eux-mêmes. Cette règle reste valable tant que cette somme reste inférieure ou égale à 9.

Exemple : 42×11=462

(iii) Carré d'un nombre finissant par 5

Pour calculer le carré d'un tel nombre, il suffit de prendre le nombre constitué de la suppression du chiffre des unités (en l'occurrence le 5), le multiplier par l'entier successif, ensuite par dix et rajouter 25 au nombre obtenu.

Exemple : $85^2 = 8 \times 9 \times 100 + 25 = 5625$

(iv) Utilisation des identités remarquables

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
  Exemple : $27 \times 33 = (30-3)(30+3) = 30^2 - 3^2 = 900 - 9 = 891$

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  Exemple : $23^2 = (20+3)^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 3 + 3^2 = 529$

- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  Exemple : $28^2 = (30-2)^2 = 30^2 - 2 \times 30 \times 2 + 2^2 = 784$

➨ ***Règles de calcul littéral***

(i) Puissances

$$A^n \times B^n = (A \times B)^n \qquad A^n \times A^m = A^{n+m}$$

$$(A^n)^m = A^{n\times m}$$

$$\frac{A^n}{A^m} = A^{n-m} \qquad \frac{A^n}{B^n} = (\frac{A}{B})^n$$

(ii) Racines carrées

Pour a et b réels positifs, n entier relatif,

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt{a}^2 = a \qquad \sqrt{a^n} = \sqrt{a}^n$$

Attention !

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

(iii) Les identités remarquables

Pour a et b réels :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

➨ ***Pourcentage***

Situation	***Application linéaire associée***	***Exemple***
Prendre ***t***% d'une quantité ***x***	$\frac{\boldsymbol{t}}{100} \times \boldsymbol{x}$	12% de ***x***, c'est 0,12***x***
Augmentation d'une quantité **x** de ***t%***	$(1 + \frac{\boldsymbol{t}}{100}) \times \boldsymbol{x}$	Si ***x*** augmente de 45%, il devient 1,45***x***
Diminution d'une quantité **x** de ***t%***	$(1 - \frac{\boldsymbol{t}}{100}) \times \boldsymbol{x}$	Si ***x*** diminue de 25%, il devient 0,45***x***
Taux de variation d'une quantité	$\frac{valeur\ finale - valeur\ initiale}{valeur\ initiale}$	Une valeur qui passe de 20 à 15, diminue de 25%

ATTENTION !

- Une baisse de x% n'est pas compensée par une hausse de x% ! Exemple : Un objet à 1000€ qui baisse de 10% coûte 900€, puis s'il augmente de 10% il coûte 990€.

En revanche si une augmentation est de la forme de 1/p, la compensation est de la forme de 1/(p+1). Et vice-versa, si la baisse est de la forme de 1/p, cette fois-ci la compensation est de la forme de 1/(p-1).

Exemple 1 : Un objet à 200€ qui augmente de 50% (donc de 1/2) coûte 300€, puis s'il baisse de 33% (donc de 1/3), il revient à son prix initial de 200€.

Exemple 2 : Un objet à 150€ qui diminue de 33% (donc de $\frac{1}{3}$) coûte 100€, puis s'il augmente de 50% (donc de $\frac{1}{2}$) il revient à son prix initial de 150€.

- Deux variations successives de x% et de y% ne sont pas équivalentes à une variation totale de (x+y)% !

Exemple : Si un objet dont le prix à 100€ augmente de 10%, il vaudra 110€. Et s'il ré-augmente de 20% il passera à 132€. Ainsi son taux de variation sera de 32% et non pas de (20+10)%.

2. Système de deux équations à deux inconnues

Un système (n, n) est un couplage de n équations à n inconnues. Lorsque ces équations sont toutes linéaires, le système est aussi dit linéaire. Nous nous intéresserons uniquement aux systèmes linéaires dans le cas où n=2. Ainsi un système linéaire de deux équations linéaires à deux inconnues est de la forme :

$$ax + by = c$$
$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

On définit le déterminant du système par :

$$\Delta = a\beta - \alpha b.$$

On admettra que le système possède des solutions uniques si et seulement si $\Delta \neq 0$.

La résolution de ce système passe par deux méthodes : dans chaque cas, on supposera que le déterminant du système est non-nul, et donc qu'il y a un unique couple de solution.

Néanmoins, on rappelle que si le déterminant est nul, c'est que le système est lié : c'est-à-dire qu'une équation est en fait un multiple de l'autre (sauf terme de droite). Dans ce cas, si les deux équations sont strictement les mêmes, il y a une infinité de solutions. Mais si on a par exemple

$$ax + by = c$$
$$ax + ay = \gamma$$

Avec $c \neq \gamma$, alors le système n'a aucune solution.

(i) Substitution

Cette méthode consiste à exprimer à l'aide de l'une des deux équations, une variable en fonction de l'autre (par exemple x en fonction de y) et de l'injecter ensuite dans la deuxième équation pour se ramener ainsi à une équation à une inconnue. Les deux équations deviennent :

$$x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}y \quad \text{et} \quad \alpha x + \beta y = \gamma$$

En injectant dans a deuxième équation :

$$\alpha\left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}y\right) + \beta y = \gamma$$

Ainsi on s'est ramené à une équation à une seule inconnue y, que l'on résout sans problème. On remplace ensuite dans la première équation γ par la valeur trouvée, et on finit de déterminer x.

(ii) Combinaison

L'idée est de trouver une combinaison linéaire simple entre les deux équations du système et qui fait disparaître une des deux inconnues. Considérons toujours le même système :

$$\begin{gathered}(1)\ ax + by = c \\ (2)\ \alpha x + \beta y = \gamma\end{gathered}$$

On va commencer par éliminer d'abord la variable y. Pour cela multiplions l'équation (1) par β et l'équation (2) par *b*.

$$\begin{array}{ll}(1) \times \beta & \beta a x + \beta b y = c\beta \\ (2) \times b & b\alpha x + \beta b y = b\gamma\end{array}$$

Effectuons à présent l'opération $(1) \times \beta - (2) \times b$:

$$(a\beta - b\alpha)x = c\beta - b\gamma$$

Ainsi :

$$x = \frac{b\gamma - \beta c}{a\beta - b\alpha}$$

En multipliant cette fois l'équation (1) par α et l'équation (2) par *a*, on trouve pour y :

$$y = \frac{a\gamma - \alpha c}{a\beta - b\alpha}$$

(iii) Déterminant

On admettra les résultats suivants :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{b\gamma - c\beta}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a\gamma - c\alpha}{\Delta}$$