Chapitre 1

Étude de fonctions

"Un problème sans solution est un problème mal posé."
Albert Einstein. Physicien allemand.

1 Fonctions usuelles

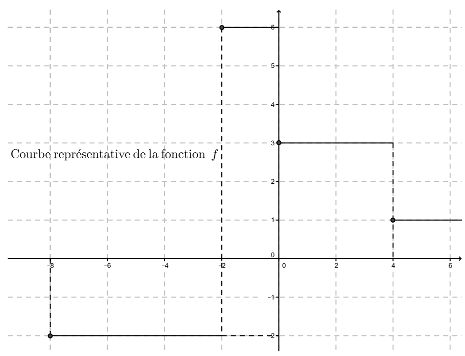
1.1 Fonction en escalier

Définition 1.1
Une fonction en escalier est une fonction constante par intervalles.

Exemple 1.1

La fonction définie sur $[-8\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad -8 \leq x < -2 \\ 6 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ 3 & \text{si} \quad 0 < x < 4 \\ 1 & \text{si} \quad 4 \leq x. \end{cases}$$

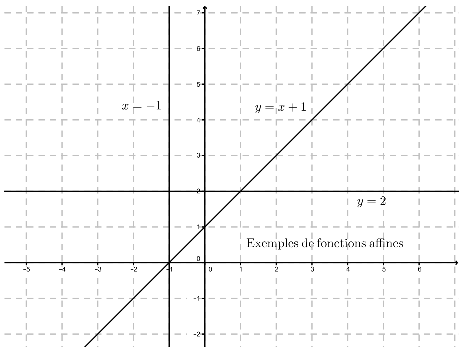


1.2 Fonction affine

Définition 1.2
Soient a et b deux réels donnés.
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est appelée **fonction affine**.
Sa représentation graphique est la droite d'équation $y = ax + b$ où :
▷ le réel a est le coefficient directeur de cette droite.
▷ le réel b est l'ordonnée à l'origine.

Exemple 1.2

Exemples de représentation graphique de fonctions affines.

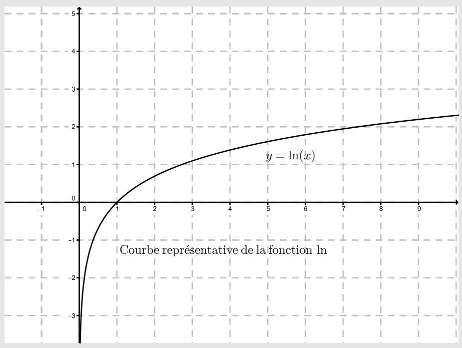


1.3 Fonction logarithme

Définition 1.3

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est la fonction définie $\forall\ x \in]\,0\,;+\infty[$, telle que $\ln(1) = 0$ et sa dérivée est la fonction inverse.

Si $f(x) = \ln(x)$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.



Proposition 1.1
Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier naturel, alors :

- $\star$ $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\star$ $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\star$ $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\star$ $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$
- $\star$ $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$
- $\star$ $\ln(e) = 1$

En résumé, le logarithme népérien possède la particularité de transformer les produits en sommes, les quotients en différences et les puissances en multiplications.

Définition 1.4
Soit a un réel strictement positif différent de 1.
On définit la fonction **logarithme de base** $\boldsymbol{a}$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Si $a = 10$, on l'appelle **fonction logarithme décimal** et on la note log.

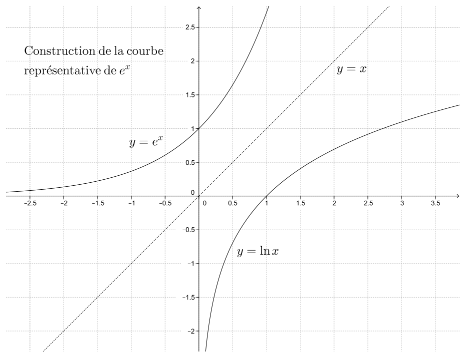
1.4 Fonction exponentielle

Définition 1.5
La fonction **exponentielle**, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$, où e^x (noté également $\exp(x)$) est l'unique nombre réel positif tel que :

$$\ln\left(e^x\right) = x.$$

Remarque 1.1

La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme, ce qui signifie que, graphiquement, les courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice ($y = x$) dans un repère orthonormal.



La fonction exp est toujours strictement positive. La valeur en 1 est notée $e^1 = e \simeq 2,718$. Nous avons la relation suivante $\forall\ x > 0$:

$$e^{\ln(x)} = x.$$

Propriété 1.1

Soient a et b deux réels et n un entier relatif, alors :

- $\star$ $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $\star$ $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$
- $\star$ $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $\star$ $e^{an} = (e^a)^n$

En résumé l'exponentielle à la particularité de transformer les sommes en produits, les différences en quotients et les multiplications en puissances (inversement au logarithme).

1.5 Fonction puissance

Définition 1.6

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction puissance (d'exposant) α, notée f_α, est la fonction qui, à tout nombre $x \in \left]0\,;+\infty\right[$ associe $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

Remarque 1.2

Pour $\alpha = 0,5$ on a $f_{0,5}(x) = x^{0,5} = e^{0,5\ln(x)} = \sqrt{x}$.

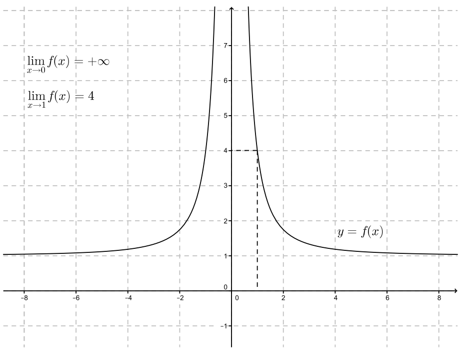
2 Notion de limites

2.1 Interprétation graphique

▶ Limite en un point

Le graphique illustre deux types de limites en un point.

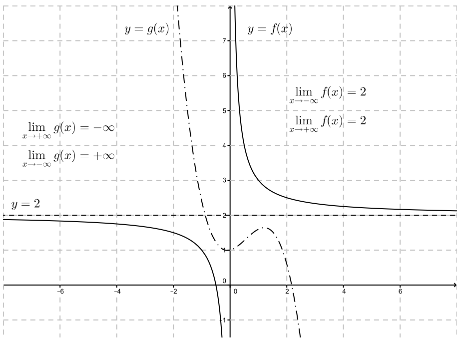
On dit alors que la courbe admet **une asymptote verticale** d'équation $x = 0$.



▶ Limite en l'infini

Le graphique illustre différents types de limites en l'infini.

On dit alors que la courbe de la fonction f admet **une asymptote horizontale** d'équation $y = 2$.



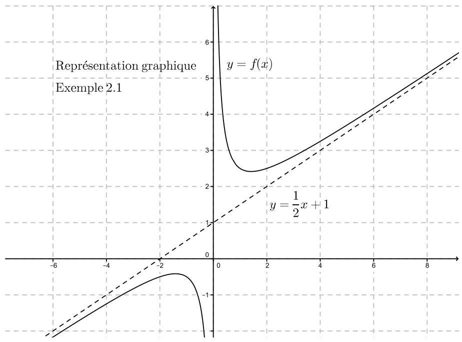
▶ Asymptote oblique

Définition 2.1
Soit f une fonction et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = ax + b$ tel que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0.$$

On dit alors que la droite $\mathcal{D}$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

Exemple 2.1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x + 1$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.



On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$
La courbe admet la droite $\mathcal{D}$ comme asymptote oblique en $+\infty$.

2.2 Limite des fonctions usuelles

Tableau résumant les différentes limites des fonctions usuelles ($n \in \mathbb{N}$).

$f(x)$	x^n		$1/x^n$		$\ln(x)$	e^x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
	n pair	n impair	n pair	n impair				
$\lim\limits_{x\to-\infty}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	$\times$	0	$\times$	$\times$
$\lim\limits_{x\to0^-}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$\times$	1	1	0
$\lim\limits_{x\to0^+}$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	1	1	0
$\lim\limits_{x\to+\infty}$	$+\infty$	$+\infty$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$\times$	$\times$

2.3 Opérations sur les limites

La notation **FI** désigne une forme indéterminée, c'est-à-dire qu'on ne sait pas calculer par une opération élémentaire. La notation “$*$” signifie qu'il faut appliquer **la règle des signes**.

▶ **Limite d'une somme de fonctions**

$\lim f$	λ	λ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	μ	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim f+g$	$\lambda+\mu$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

▶ **Limite d'un produit de fonctions**

$\lim f$	λ	$\lambda \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	μ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim f \times g$	$\lambda \times \mu$	$*\infty$	$*\infty$	FI

▶ **Limite d'un quotient de fonctions**

$\lim f$	λ	λ	λ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$\mu \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\mu \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim f/g$	λ/μ	0	$*\infty$	$*\infty$	FI	FI

▶ **Limite d'une composée de fonctions**
Avant de définir la limite d'une composée de fonctions, rappelons quelques notions sur l'opération *composée de fonctions*.

Définition 2.2
Soient f et g deux fonctions. On appelle **composée de f suivie de g**, notée $g \circ f$, la fonction h qui pour x associe $g(f(x))$.

Exemple 2.2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$.
La fonction h, composée de f suivie de g est donnée par :

$$h(x) = (3x + 2)^3.$$

En effet : $x \longmapsto f(x) = (3x + 2) \longmapsto g(f(x)) = (3x + 2)^3$.

Remarque 2.1
Généralement, la fonction composée $f \circ g$ est différente de $g \circ f$.
La fonction φ, composée de g suivie de f a pour expression :

$$\varphi(x) = 3x^3 + 2.$$

Clairement, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \neq h(x)$.

Propriété 2.1
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Soient deux fonctions, f définie de I dans J et g de J dans $\mathbb{R}$.
Supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$, alors :

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \lim_{x \to a} g\left(f(x)\right) = c.$$

Exemple 2.3
Considérons la fonction $h(x) = e^{-x+3}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} -x + 3 = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, on en déduit alors $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

2.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

En présence d'une forme indéterminée, toutes les situations sont *a priori* possibles : existence d'une limite finie, nulle ou non, existence d'une limite infinie, absence de limite. Seule une étude permet de lever l'indétermination.

Tableau des indéterminations des limites

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	Limite indéterminée	Type d'indétermination
$+\infty$	$-\infty$	$f(x) + g(x)$	$\infty - \infty$
0	$\pm\infty$	$f(x) \times g(x)$	$0 \times \infty$
0	0	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{0}{0}$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$

▶ **Indétermination du type $\infty - \infty$**

Considérons la fonction $f(x) = 3x^2 - x$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, on en déduit alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 - x$ est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.