Introduction

NOTIONS PRELIMINAIRES

La géométrie a pour but l'étude des figures de l'espace qui nous environne : pour débuter cette étude, il est nécessaire de poser a priori un certain nombre d'éléments de base (droite, plan, par exemple) et de ***postulats*** ou ***axiomes*** c'est-à-dire de propriétés admises sans démonstration.
Ces éléments de base et ces postulats s'appuient toutefois sur des faits expérimentaux courants.
Leur rappel est l'objet de cette introduction.

1 Eléments géométriques fondamentaux.

1.1 Le point.

C'est un élément sans dimension. Une étoile dans le ciel donne, de la terre, l'image d'un ***point*** lumineux.
Du point de vue géométrique, l'espace est considéré comme constitué de points.

1.2 La ligne ; la droite.

Un point matériel qui se déplace engendre une ***ligne*** ; un fil très fin donne aussi l'image d'une ligne. Une ligne est un élément à une dimension (longueur entre deux de ses points).
Une ***droite*** est une ligne particulière : son image est donnée par un fil fin tendu ou encore par l'arête d'une règle.

1.3 La surface ; le plan.

Le déplacement d'une ligne dans l'espace engendre une ***surface***.
Une surface est aussi l'ensemble des points qui séparent l'intérieur et l'extérieur d'un objet. Une surface est une grandeur à deux dimensions (aire limitée par une ligne fermée).
Le ***plan*** est une surface particulière : une nappe d'eau au repos ou le dessus d'une table en sont des images.

1.4 Les postulats de la droite et du plan.

On admet les postulats suivants pour la droite et le plan (ce ne sont pas les seuls).

1.4.1 Par deux points distincts, il passe une droite et une seule.

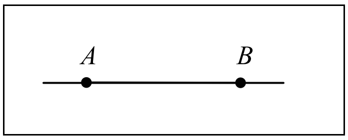

Fig. 1 *A* et *B* déterminent une droite unique

1.4.2 Une droite est illimitée dans les deux sens.
Il nous sera donc impossible de dessiner une droite ! Cela n'est guère gênant puisque deux points suffisent à la caractériser.

1.4.3 Le postulat d'*EUCLIDE*.

Définition Deux droites sont ***parallèles*** si elles sont dans un même plan et n'ont aucun point commun.

Enoncé du postulat d'EUCLIDE

Par un point extérieur à une droite, on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite.

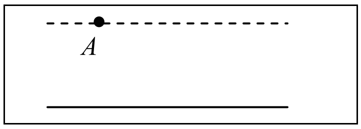

Fig. 2 Le postulat d'*EUCLIDE*

Nullement évident, ce postulat a donné lieu à controverses.
On construit d'ailleurs des géométries, dites non-euclidiennes[1], ne l'acceptant pas.

1.4.4 Si un plan contient deux points *A* et *B*, il contient tous les points de la droite (*AB*).

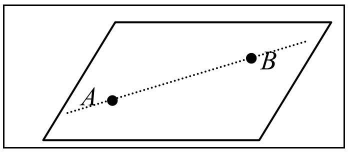

Fig. 3 Postulat du plan

Chercher l'exercice 1 à la fin du chapitre.

2 Déplacements ; figures égales.

Une figure géométrique est un ensemble de points, comme par exemple un triangle ou l'intérieur d'une sphère.
Pour décider de l'égalité de deux figures, nous avons besoin de l'idée de ***déplacement*** telle qu'on l'imagine en pensant au déplacement d'un objet : avant et après déplacement, il s'agit du même objet bien que les points de l'espace occupés par chacune des positions soient différents.

[1] Géométrie hyperbolique de LOBATCHEVSKI où par un point il passe une infinités de parallèles à une droite et géométrie elliptique de RIEMANN où il n'en passe aucune, celle-ci étant utilisée en théorie de la relativité.

Avant étude plus complète des déplacements ou ***isométries*** faite dans les autres chapitres, nous donnons ici des notions sommaires sur ***translation***, ***rotation*** et ***symétrie*** dans le plan.

2.1 Translation.

C'est le déplacement d'un objet parallèlement à lui-même, sans changer son orientation.

On le caractérise par un vecteur et on le représente par une flèche.

On dira : la translation de vecteur $\vec{T}$.

Les vecteurs font l'objet du chapitre 7.

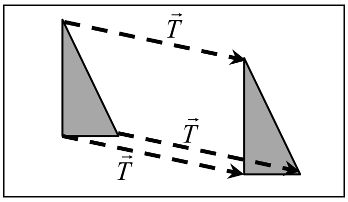

Fig. 4 Translation $\vec{T}$

2.2 Rotation dans le plan.

C'est le déplacement d'un objet autour d'un point, le centre de rotation.

On la caractérise par le centre et l'angle de rotation.
La figure représente une rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre.

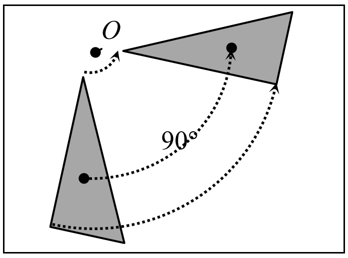

Fig. 5 Rotation de 90°

2.3 Symétrie par rapport à une droite.

La symétrie axiale autour de la droite xy transforme tout point M de la figure en un point M' de sorte que xy soit ***médiatrice*** de MM'.

(*Définition de la médiatrice, chapitre 1, §1.2*).
On l'obtient aussi par pliage autour de xy.

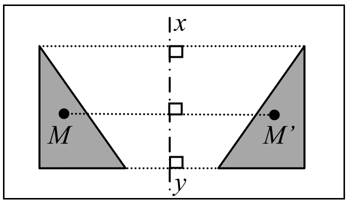

Fig. 6 Symétrie axiale

2.4 Déplacement dans l'espace.

Dans l'espace, on définit également :
- la rotation autour d'un axe, comme le mouvement d'un moteur électrique,
- la symétrie par rapport à un plan comme l'image renvoyée par un miroir.

2.5 Egalité de deux figures planes.

Dans le plan, deux figures sont égales si on peut les superposer par ***glissement*** sur le plan (translation ou rotation par exemple) ou par ***retournement*** (symétrie axiale en plus de translation ou rotation).

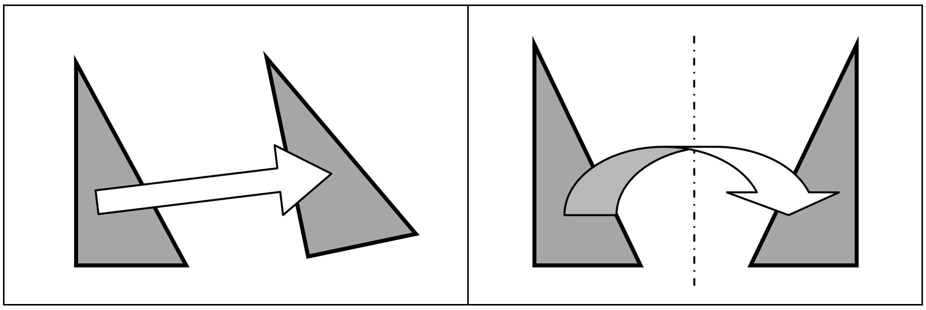

Fig. 7a - Figures superposables par glissement obtenu par une combinaison de translation ou rotation.
Les deux figures ont même orientation.

7b - Figures superposables par retournement obtenu par une symétrie axiale.
L'orientation de la figure image est inversée.

Chercher les exercices 2, 3 et 4.

3 La droite.

3.1 Demi-droite et segment.

Un point *O* situé sur une droite la partage en deux ***demi-droites*** : *Ox* et *Ox'*.

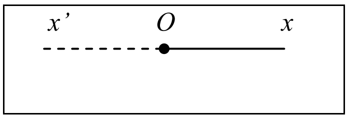

Fig. 8 Demi-droites

Un ***segment de droite*** est constitué des points de la droite compris entre deux d'entre eux.

Le segment d'extrémités *A* et *B* est noté [*AB*].

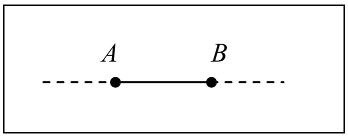

Fig. 9 Le segment [*AB*]

La ***longueur*** d'un segment suppose le choix d'un segment de longueur unité.
Sur la figure 10, on a pu mettre 3 fois bout à bout le segment unité [*IJ*] pour obtenir [*AB*].

La longueur de [*AB*] est alors de 3 unités.
La longueur de [*AB*] est notée *AB*.

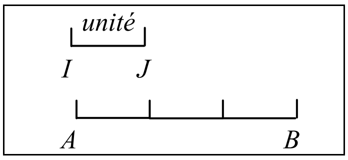

Fig. 10 $AB = 3IJ$

Si le rapport des longueurs n'est pas entier, on utilise des sous-multiples de l'unité de longueur, par exemple avec le mètre : décimètre, centimètre,…
La longueur est toujours un nombre réel positif ou nul ; c'est aussi la ***distance*** entre les extrémités du segment.

3.2 Direction et sens.

Un ensemble de droites parallèles définit une ***direction***.
Sur la droite (MN), représentant une direction, on distingue deux ***sens*** : de M vers N et de N vers M.
La demi-droite Ox donne à la fois la direction, celle de la droite (MN), et le sens, de M vers N.

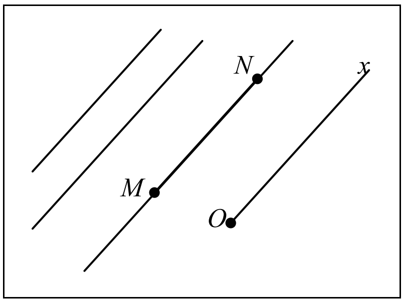

Fig. 11 Direction et sens

3.3 Axe.

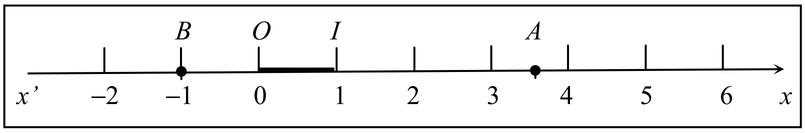

Fig. 12 L'axe $x'x$

Un ***axe*** est une droite orientée et graduée. On le définit en se donnant :

- une origine O,
- un segment OI de longueur unité,
- un sens sur la droite, de O vers I.

Chaque point est alors repéré par son ***abscisse*** : sa distance à O affectée du signe "+" ou "–" selon le sens. Par exemple, sur la figure 12 :

abscisse(A) = 3,5   abscisse(B) = –1   abscisse(I) = 1

Voir aussi le chapitre Vecteurs (Ch.7 §4).

Chercher les exercices 5, 6 et 7.

4 Angle de demi-droites

4.1 Angles géométriques et angles orientés.

L'angle de demi-droites (Ox, Oy), permet de situer direction et sens de Oy par rapport à Ox. Cet angle caractérise la rotation autour de O amenant Ox sur Oy.
La demi-droite Ox est appelée l'***origine*** de l'angle (Ox, Oy), Oy l'***extrémité***.

L'ordre des demi-droites intervenant, un tel angle est donc une ***grandeur orientée***.

Les angles (Ox, Oy) et (Oy, Ox) sont dits ***opposés*** (*voir plus loin*).

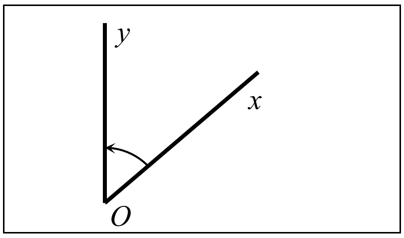

Fig. 13 Angle orienté (Ox, Oy)

Dans les cas où l'on n'a pas besoin de distinguer le sens, on parle d'***angle géométrique*** et on le note $\hat{O}$ ou $x\widehat{O}y$.

4.2 Angles égaux ; angles opposés.

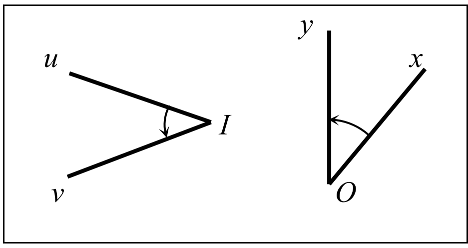

Fig. 14a (Ox, Oy) = (Iu, Iv)

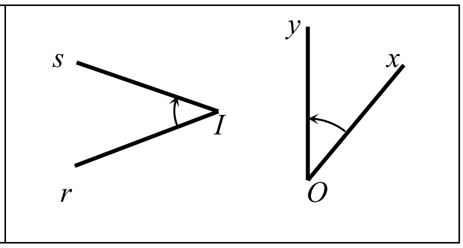

Fig. 14b (Ox, Oy) = – (Ir, Is)

Deux angles orientés superposables par glissement sont égaux.
Par exemple, sur la figure 14a :

$$(Ox, Oy) = (Iu, Iv).$$

Deux angles orientés superposables par retournement sont opposés.
Sur la figure 14b : $(Ox, Oy) = -(Ir, Is)$.

Mais dans ces deux cas, les angles géométriques (sans considération de sens) sont égaux.

4.3 Bissectrice d'un angle.

C'est la droite qui partage un angle de demi-droites en deux angles égaux.

(uv) bissectrice de (Ox, Oy) signifie :

$$(Ox, Ou) = (Ou, Oy)$$

et $$(Ox, Ov) = (Ov, Oy)$$

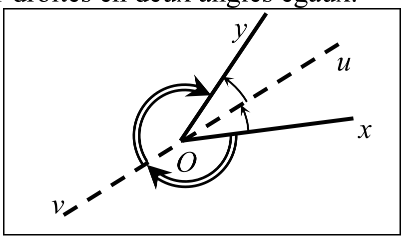

Fig. 15 (Ox, Ou) = (Ou, Oy)
(Ox, Ov) = (Ov, Oy)

On peut aussi considérer que (uv) est axe de symétrie pour (Ox, Oy) :

$$(Ou, Ox) = -(Ou, Oy)$$

et $$(Ov, Ox) = -(Ov, Oy)$$

puisque (Ou, Ox) et (Ou, Oy), par exemple, sont superposables par retournement.

4.4 Mesure d'angles géométriques; le degré.

A partir de la rotation d'un tour complet autour d'un point, on utilise principalement deux unités de mesure des angles géométriques :

- le ***degré*** (°) 360$^{\text{ème}}$ partie du tour
- le ***radian*** (rd) *voir le chapitre 4, trigonométrie.*

Le problème de la mesure des angles orientés, présentée au chapitre 4 (trigonométrie), nous conduira à raisonner sur des mesures positives ou négatives.

Vocabulaire pour les angles de mesures comprises entre 0° et 360°.

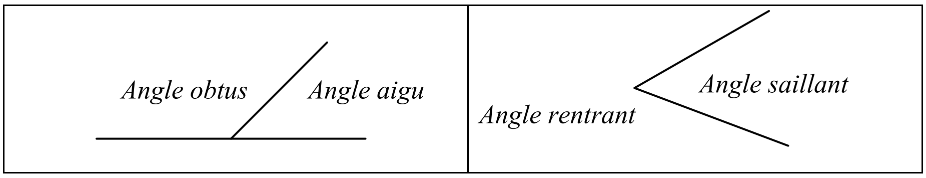

Fig. 16 Angles aigu, obtus, saillant, rentrant

Angle plat	Angle de mesure 180° (moitié d'un tour)
Angle droit	Angle de mesure 90° (moitié d'un plat)
Angle aigu	Angle de mesure comprise entre 0° et 90°
Angle obtus	Angle de mesure comprise entre 90° et 180°
Angle saillant	Angle de mesure comprise entre 0° et 180°
Angle rentrant	Angle de mesure comprise entre 180° et 360°

Remarque

En fait, dessiner un angle, c'est partager le plan en deux ***secteurs*** : l'un est le secteur saillant, l'autre le secteur rentrant du même angle ; il est cependant d'usage courant de parler d'angles saillant et rentrant pour secteurs saillant et rentrant.

4.5 Somme de deux angles.

La somme des angles orientés (Oa, Ob) et (Ob, Oc), ayant même origine O et le côté extrémité Ob du premier confondu avec le côté origine du second, est par définition l'angle (Oa, Oc).

$$(Oa, Ob) + (Ob, Oc) = (Oa, Oc)$$

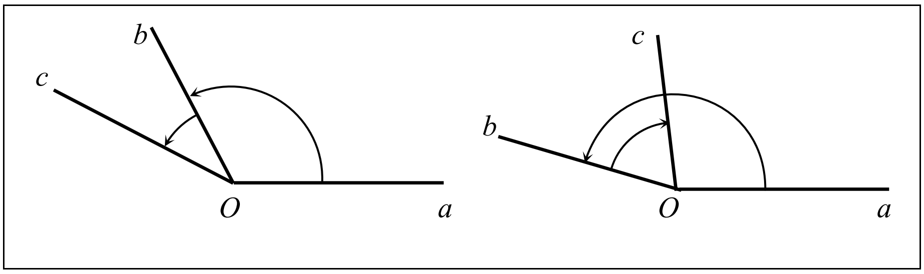

Fig. 17 Dans les deux cas : $(Oa, Ob) + (Ob, Oc) = (Oa, Oc)$

Cas particuliers

Deux angles sont ***supplémentaires*** si leur somme vaut un angle plat.
Deux angles sont ***complémentaires*** si leur somme vaut un angle droit.

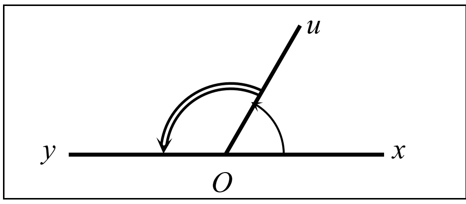

Fig. 18a (Ox, Ou) et (Ou, Oy) sont supplémentaires.

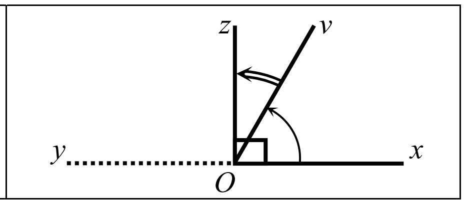

Fig. 18b (Ox, Ov) et (Ov, Oz) sont complémentaires.

Ainsi, sur la figure 18a : $(Ox, Ou) + (Ou, Oy) = (Ox, Oy) = 1$ plat
et, figure 18b : $(Ox, Ov) + (Ov, Oz) = (Ox, Oz) = 1$ droit

Somme d'angles dans une position quelconque

Pour effectuer la somme de deux angles a et b, on les fait préalablement glisser pour amener en coïncidence :

- les deux sommets entre eux en un point quelconque,
- le côté origine du second avec le côté extrémité du premier.

L'angle $(a + b)$ est représenté par l'angle ayant pour origine le côté origine du premier et pour extrémité le côté extrémité du second (*figure 19*).

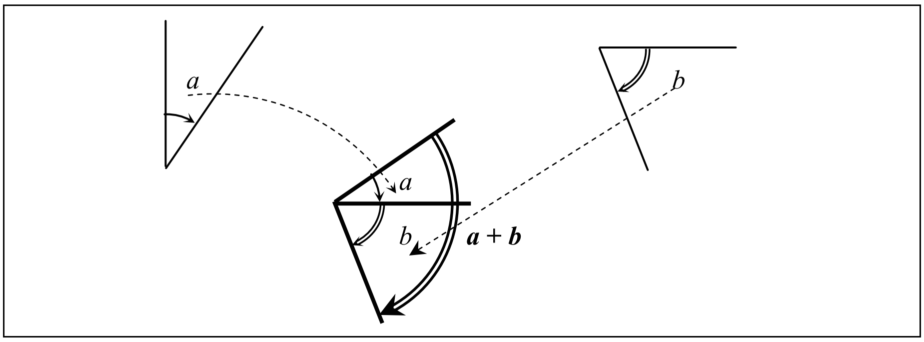

Fig. 19 Somme des angles a et b n'ayant pas de côtés communs