SUITES NUMÉRIQUES

1 COMMENT MENER UN RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE ?

OBJECTIF

Démontrer une propriété dépendante d'un entier naturel n en deux étapes.

MÉTHODE

- **Initialisation** : vérifier que la propriété est vraie pour le premier entier pour lequel on a énoncé le résultat (en général $n = 0$ ou $n = 1$)
- **Hérédité** : on suppose que la propriété est vraie pour un entier n et on prouve que le résultat est alors vrai au rang $n + 1$

Puis on conclut que par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.

ex. Considérons la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

- Montrer que pour tout entier n on a $u_n \leq 1$.
- On définit la proposition à démontrer : soit P(n) : « $u_n \leq 1$ » pour $n \geq 0$.

Initialisation : $n = 0$, $u_0 = 0$ par définition. Donc P(0) est bien vraie.

Hérédité : Supposons P(n) vraie c'est-à-dire $u_n \leq 1$.

Alors $3u_n \leq 3$, donc $3u_n - 2 \leq 1$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 1$. Ainsi P(n+1) est vraie.

Par principe de récurrence, P(n) est vraie pour tout n.

CONSEIL

Veillez à bien structurer votre démarche pour faire apparaître chaque étape. Peu importe l'ordre dans lequel les deux étapes sont faites, en revanche il est indispensable que les deux étapes soient présentes pour pouvoir conclure.

TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 1.1 (5 pts) *5 min*

Soit u la suite définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2u_n + 1} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n > 0$.

2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 1$.

Exercice 1.2 (4 pts) *5 min*

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe deux entiers, notés a_n et b_n tels que

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

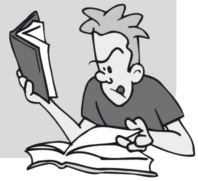
Exercice 1.3 (8 pts) *10 min*

Soit u la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n}$.

1. Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$ définie sur $]0\,;+\infty[$.
Déterminer le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. Montrer que pour tout entier n, on a $2 \leq u_n \leq 3$.

2 QUEL EST LE SENS DE VARIATION D'UNE SUITE ?



- Une suite u est croissante si pour tout entier n on a $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite u est décroissante si pour tout entier n on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Dans certains cas, on peut raisonner directement : la suite u définie par $u_n = n + 3$ est croissante car $n + 3 \leq n + 1 + 3$, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier n.

Erreur à éviter : ce qui est vrai pour deux termes consécutifs ne l'est pas forcément pour tous !
Considérons la suite u définie par $u_{n+1} = -\frac{u_n}{2} + 2$, avec $u_0 = 2$.

On a alors $u_1 = 1$. On pourrait conjecturer que la suite est décroissante.
Or $u_2 = 1{,}5$! Il faut donc veiller à raisonner pour tout entier n pour lequel la suite est définie.

Pour étudier le sens de variation, on peut :

- Étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
- Uniquement dans le cas où on sait que la suite est positive, comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
- Faire une démonstration par récurrence.

On peut aussi avoir monotonie à partir d'un certain rang uniquement.
Considérons la suite $u_n = \frac{n+1}{n^2+2}$ pour tout entier n.

Alors $u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{(n+1)^2+2} - \frac{n+1}{n^2+1} = \frac{-n^2-3n+1}{(n^2+2)(n^2+2n+3)}$.

Comme $n^2 + 2 > 0$ et $n^2 + 2n + 3 > 0$, il suffit d'étudier le signe de $-n^2 - 3n + 1$. On calcule le discriminant associé $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 13 > 0$. On calcule les deux racines : $x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{-2} \approx 0{,}3$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{-2} \approx -3$. Ainsi, si $n \geq 1$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite u est décroissante à partir du rang 1.

Si on considère la suite $v_n = \frac{2^n}{3^n}$ alors la suite est clairement positive et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{3} < 1$: comme $v_n > 0$ on a $v_{n+1} < v_n$, la suite v est décroissante.

TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 2.1 (12 pts) *15 min*

Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la suite.

1. $u_n = \dfrac{3n+2}{7n+1}$

2. $v_n = \left(\dfrac{7}{3}\right)^n$

3. $w_n = \dfrac{1}{2^n}$

4. $a_n = \sin(n)$

5. $b_0 = 0$ et $b_{n+1} = b_n + 2b_n^2 + 1$

6. $c_n = (-1)^n$

7. $d_n = 1 - \dfrac{3}{n}$

8. $e_0 = 1$ et $e_{n+1} = 3e_n + 2$
On pourra au préalable prouver que $e_n > 0$ pour tout entier *n*.

Exercice 2.2 (6 pts) *12 min*

Soit *u* la suite définie pour tout entier *n* par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

1. Comparer 2^n et n^2. (Indication : on pourra émettre une conjecture en utilisant les premiers termes puis la démontrer par récurrence).

2. En déduire un encadrement de u_n.

3. Étudier le sens de variation de la suite *u*.

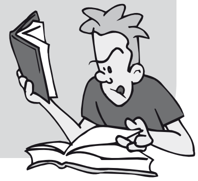
Exercice 2.3 (2 pts) *10 min*

On considère la suite *u* définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. Démontrer que pour tout entier *n*, on a $0 < u_n \leq 2$.

2. Déterminer le sens de variation de la suite *u*.

3 EST-CE QUE LA SUITE EST ARITHMÉTIQUE ? GÉOMÉTRIQUE ?



> **DÉFINITION** Une suite u est arithmétique si il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} = u_n + r$.

- **Pour démontrer qu'une suite est arithmétique**, on peut calculer la différence $u_{n+1} - u_n$ et prouver que le résultat est constant pour tout n.

ex. Marc dépose 10 € sur son livret tous les mois sachant que le montant initial était de 100 €. Alors si on note u_n le montant de son livret au $n^{\text{ième}}$ mois après l'ouverture on a $u_{n+1} - u_n = 10$. Ainsi la suite u est arithmétique.

> **THÉORÈME** Si u est arithmétique alors pour tous entiers n et p on a $u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_p + (n-p)r$

> **DÉFINITION** Une suite u est géométrique si il existe un réel q tel que $u_{n+1} = q \times u_n$ pour tout entier naturel n.

- **Pour démontrer qu'une suite est géométrique**, il faut exprimer u_{n+1} en fonction de u_n en recherchant une factorisation.
  Si on est certain que $u_n \neq 0$, on peut aussi montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.

ex. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0{,}2u_n - 8$. On considère la suite v définie par $v_n = u_n + 10$. Montrer que la suite v est géométrique.

On exprime v_{n+1} en fonction de v_n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 10 = 0{,}2u_n - 8 + 10 = 0{,}2u_n + 2 = 0{,}2\left(u_n + 10\right) = 0{,}2v_n$$

Ainsi la suite v est géométrique de raison 0,2.

> **THÉORÈME** Si v est géométrique de raison q alors pour tous entiers n et p on a $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_n = u_p \times q^{n-p}$

- **ATTENTION** : Beaucoup de suites ne sont ni arithmétiques ni géométriques.

TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 3.1 (4 pts) *5 min*

Parmi les suites suivantes, déterminer celles qui sont arithmétiques, géométriques. Attention, certaines suites ne sont peut-être ni l'un ni l'autre.

1. $u_n = 3n + 2$

2. $v_n = \dfrac{2}{3^n}$

3. $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = 2a_n + 5$

4. $b_0 = 1$ et $b_{n+1} = b_n - 7$

Exercice 3.2 (6 pts) *15 min*

Soit u la suite définie par $u_0 = 1000$ et $u_{n+1} = 0{,}4u_n + 480$.

1. a. Calculer u_1 et u_2.

b. Montrer que pour tout entier n, on a $u_n \geq 800$.

c. En déduire que la suite u est décroissante.

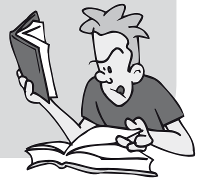
2. On considère la suite v définie par $v_n = u_n - 800$.

a. Montrer que la suite v est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

b. Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

c. En déduire la valeur exacte de u_{50}.

4 COMMENT UTILISER MA CALCULATRICE DANS L'ÉTUDE D'UNE SUITE ?



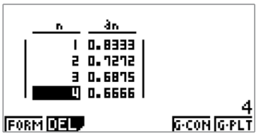
Les calculatrices graphiques permettent de calculer les termes d'une suite, d'obtenir la représentation graphique et d'émettre des conjectures sur le sens de variation et l'éventuelle convergence de la suite.

Pour les suites définies explicitement

Soit u la suite définie par $u_n = \dfrac{3n+2}{5n+1}$.

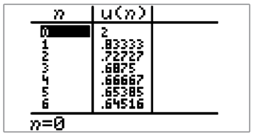
- Casio

En utilisant le menu RECUR et le type an=, on entre la formule. Puis on peut faire afficher la table de 21 premières valeurs (en précisant dans RANG le dernier rang).



- Texas Instrument

Il faut paramétrer la calculatrice dans MODE et sélectionner Seq au lieu de Func. Puis dans Y=, entrer la formule. Faire afficher la table.



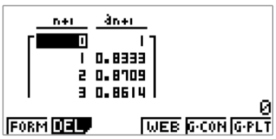
On peut alors conjecturer que la suite est décroissante et convergente vers 0,6.

Pour les suites définies par récurrence

Soit u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{5u_n+1}$.

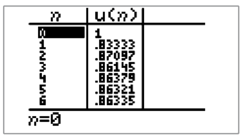
- Casio

En utilisant le menu RECUR et la type an+1=, on entre la formule. Il ne faut pas oublier de préciser les paramètres dans RANG et entrer la valeur initiale a0. Puis on fait afficher la table des 21 premières valeurs.



- Texas Instrument

On entre la formule en décalant bien les indices de termes (u_{n+1} devient u_n et u_n devient u_{n-1}) et en précisant la valeur du premier terme. Puis on fait afficher la table.



On peut alors conjecturer que u est décroissante et convergente vers 0,8633.