

Chapitre 1

SUITES ARITHMÉTIQUES

1. Suites numériques

1.1. Exemples et vocabulaire

Une *suite numérique* est une liste de nombres rangés dans un certain ordre. Ces 5 exemples seront utilisés dans ce chapitre.

1. $(3,2 ; \sqrt{5} ; -7 ; \pi)$ est une suite de 4 termes dont le premier est 3,2.
2. $(3 ; 1 ; 4 ; 1 ; 5 ; 9 ; 2 ; \dots)$ est la suite infinie des décimales successives du nombre π . Seuls les 7 premiers ont été écrits.
3. Chaque numéro d'immatriculation à la sécurité sociale est une suite de 13 termes. Chaque terme est un chiffre (entier de 0 à 9).
4. $(3 ; 8 ; 13 ; 18 ; 23 ; \dots)$ est la suite infinie obtenue en comptant de 5 en 5 à partir de 3.
5. Les valeurs prises chaque année par un capital placé pendant 10 ans constituent une suite de 11 termes. La valeur à une année donnée dépend de celle de l'année précédente et du taux d'intérêt.

1.2. Numérotation indicielle des termes d'une suite

La numérotation de chaque terme à partir du premier permet d'en repérer le *rang* ; on réalise cette numérotation à l'aide d'un *indice*.

Ainsi la première suite peut être notée (a_1, a_2, a_3, a_4) avec :

$$a_1 = 3,2 \quad a_2 = \sqrt{5} \quad a_3 = -7 \quad a_4 = \pi$$

On sera souvent amené à débiter à l'indice 0 ; ainsi dans le cinquième exemple, la suite des 11 capitaux peut être notée :

$$(C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10})$$

C_0 étant le capital initial et C_n le capital à la fin de l'année n ($1 \leq n \leq 10$).

L'ensemble des indices est généralement constitué d'entiers consécutifs ; pour le définir, il suffit de préciser l'indice du premier terme et celui du dernier si la suite est finie.

Par exemple, pour la troisième suite de 13 termes, on peut choisir pour ensemble des indices les entiers de 1 à 13, $[1 \dots 13]$ ou encore les entiers de 0 à 12, $[0 \dots 12]$.

Pour une suite infinie, on utilise le plus souvent :

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ à l'indice 0.

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ en débutant à l'indice 1.

Notation des suites

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble I des indices, la suite sera notée (u_n) où u_n est le **terme d'indice n** (lire “ u indice n ”).

La notation plus précise $(u_n)_{n \in I}$ nécessite d'explicitier l'ensemble I .

Par exemple, la suite des carrés d'entiers positifs (1, 4, 9, 16, ...) peut s'écrire :

$$(u_n = n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

Ces deux exercices vous familiarisent avec la notation indicielle.

Exercice à chercher n°1

- 1°) Pour chaque suite des 4 premiers exemples donner l'ensemble des indices en débutant à l'indice 0.
- 2°) Reprendre la question en débutant à l'indice 1.
- 3°) Donner, quand c'est possible, le terme u_4 de chaque suite, notée (u_n) .

Exercice à chercher n°2

Dans l'exemple 5 de la suite de capitaux, le premier placement ayant lieu en 1997, on choisit 97 pour premier indice :

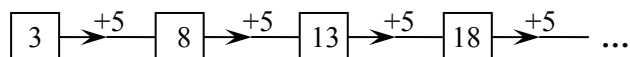
Comment est alors notée la suite des 11 capitaux ?

2. Suites arithmétiques

La quatrième suite (3 ; 8 ; 13 ; 18 ; 23 ; ...) du §1.1, est un exemple de **suite arithmétique de raison (+5)**.

Elle a été définie par **récurrence**, c'est-à-dire en donnant

- le premier terme (+3),
- le procédé de passage d'un terme au suivant, “ajouter 5”:



Ecriture

En débutant à l'indice 0 : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = u_n + 5\}$

ou en débutant à l'indice 1 : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \{u_1 = 3 \text{ et } u_{n+1} = u_n + 5\}$

2.1. Définition par récurrence d'une suite arithmétique

Dans une suite arithmétique la différence entre deux termes consécutifs est constante ; cette différence s'appelle la *raison*.

Une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r est donc définie par la récurrence :

$$\{u_0 \text{ donné ; quel que soit } n, u_{n+1} = u_n + r\} \quad 1.1$$

Ainsi pour la suite arithmétique (3 ; 8 ; 13 ; 18 ; 23 ; ...) indicée dans $\mathbb{N}$, on a : $u_1 - u_0 = 8 - 3 = 5$; $u_2 - u_1 = 5$; $u_3 - u_2 = 5$ et ainsi de suite.

Pour une suite finie, il faut préciser le dernier indice ou encore le nombre de termes.

Exemples et contre-exemples

1. La suite $\{u_n = -3n + 2\}$ où $n \in \mathbb{N}$ est arithmétique de raison (-3) .

En effet : $u_{n+1} - u_n = [-3(n+1) + 2] - [-3n + 2] = -3$

Il est bon de vérifier par un tableau de valeurs des premiers termes :

Indice n	0	1	2	3	...
Terme $(-3n + 2)$	2	-1	-4	-7	...

2. La suite définie par récurrence : $\{u_1 = 7 \text{ et } u_{n+1} = u_n - 2\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est arithmétique de raison (-2) et de premier terme 7.

3. La suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = n^2$ n'est pas arithmétique.

Pour le prouver, il faut montrer que $(u_{n+1} - u_n)$ n'est pas constant quel que soit l'indice n . Il suffit pour cela de trouver deux valeurs de n pour lesquelles $(u_{n+1} - u_n)$ prend deux valeurs distinctes.

Ainsi pour $n = 0$, $u_1 - u_0 = 1$, alors que pour $n = 1$, $u_2 - u_1 = 3$.

4. La suite définie par $\{u_1 = 7 \text{ et } u_{n+1} = u_n + n\}$ n'est pas arithmétique.

$u_{n+1} - u_n = n$ n'est pas constant mais dépend de l'indice n .

par exemple, $u_2 - u_1 = 8 - 7 = 1$ est différent de $u_3 - u_2 = 10 - 8 = 2$.

Voici maintenant deux exercices d'identification de suite arithmétique.

Exercice à chercher n°3

Déterminer les six termes d'une suite arithmétique de raison (-3) et de troisième terme $(+7)$.

Exercice à chercher n°4

Indiquer, parmi les suites suivantes, celles qui sont arithmétiques. Préciser alors leur raison.

1°) $(0,9 ; 0,99 ; 0,999 ; 0,9999)$

2°) $\{u_n = 2n + 4 \text{ pour } n \in \mathbb{N}\}$

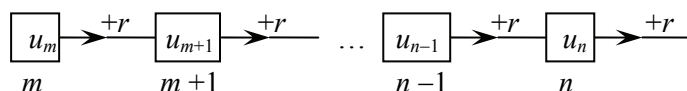
3°) $\{u_0 = 5 ; u_{n+1} = 2u_n + 4 \text{ pour } n \in \mathbb{N}\}$

4°) $(u_0 = 2 ; u_{n+1} = u_n - 1 \text{ pour } n \in \mathbb{N})$

5°) $\{u_n = \frac{1}{n}, \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}^*\}$

2.2. Calcul d'un terme d'indice donné

Prenons deux termes u_m et u_n d'une suite arithmétique de raison r et supposons, pour fixer les idées, $m \leq n$.



La différence de m à n est $(n - m)$: on ajoute donc $(n - m)$ fois la raison r pour passer de u_m à u_n .

$$u_n - u_m = (n - m).r \quad 1.2$$

Le lecteur vérifiera que 1.2 reste valable si $n < m$.

En particulier cette formule donne le terme u_n d'indice n en fonction du premier terme, u_0 ou u_1 selon le choix.

$$u_n = u_0 + n.r \quad n \in \mathbb{N} \quad 1.3$$

$$u_n = u_1 + (n - 1).r \quad n \in \mathbb{N}^* \quad 1.4$$

Exercice traité

Quel est le 100^{ème} terme de la 4^{ème} suite du §1.1 $(3 ; 8 ; 13 ; 18 ; 23 ; \dots)$?

Adoptons $\mathbb{N}^*$ comme ensemble des indices : $u_1 = 3$.

Le 100^{ème} terme est u_{100} ; d'après 1.4, $u_{100} = 3 + (100 - 1).5 = 497$.

Attention au choix de l'ensemble des indices.

En optant pour $\mathbb{N}$ comme ensemble des indices, il faut appliquer 1.3, avec $u_0 = 3$; mais le 100^{ème} terme s'écrit alors u_{99} , ce qui donne, bien sûr, le même résultat, 497.

L'exercice 5 propose une application des formules 1.2 à 1.4.

Exercice à chercher n°5

Pour les 5 suites arithmétiques suivantes notées (u_n) de raison r , calculer :

- 1°) u_{17} sachant que : $u_1 = 3$ et $r = 2$.
- 2°) u_{30} sachant que : $u_3 = 1/4$ et $r = -2/3$.
- 3°) u_1 sachant que : $u_{12} = 38$ et $r = 3$.
- 4°) r sachant que : $u_0 = 4$ et $u_{24} = 76$.
- 5°) n sachant que : $u_n = 109$, $u_7 = 31$ et $r = 2$.

2.3. Croissance et décroissance

Une suite numérique est croissante à partir d'un certain rang si, à partir de ce rang, tout terme est supérieur au précédent : $u_{n+1} > u_n$.

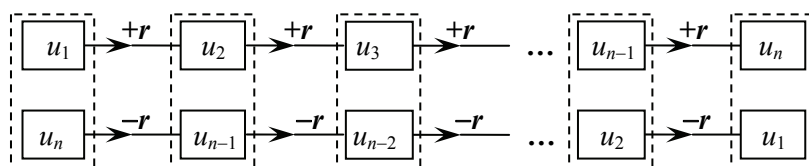
Puisqu'une suite arithmétique est caractérisée par $u_{n+1} - u_n = r$, la croissance ou décroissance est liée au signe de la raison r .

- Si r est positif, la suite est **croissante** quel que soit l'indice.
- Si r est négatif, la suite est **décroissante** quel que soit l'indice.
- Si r est nul, la suite est **stationnaire** (tous les termes sont égaux).

3. Somme des termes d'une suite arithmétique finie

3.1. Théorème

Pour calculer la somme des termes d'une suite arithmétique finie de n termes $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ et de raison r , introduisons la suite de raison $(-r)$ formée des mêmes termes mais en inversant l'ordre $(u_n, u_{n-1}, \dots, u_2, u_1)$.



Deux termes "équidistants" des extrémités (*dans les cadres en pointillés*), ont une somme constante puisque, en passant d'un cadre au suivant, on ajoute r à un terme et soustrait r à l'autre :

$$u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = u_3 + u_{n-2} = \dots = u_n + u_1$$

La somme de tous les termes des deux suites vaut donc $(u_1 + u_n).n$; ces deux suites étant formées des mêmes termes, on en déduit :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{(u_1 + u_n)}{2} . n \quad 1.5$$

Attention aux indices

Si la suite débute à l'indice 0, le dernier terme étant toujours noté u_n , elle comporte $(n + 1)$ termes et la formule devient :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)}{2} . (n + 1) \quad 1.6$$

On s'affranchit des notations en retenant ces formules sous la forme :

$$\text{Somme} = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2} . (\text{nombre de termes}) \quad 1.7$$

Ces formules s'expriment aussi à l'aide du premier terme, de la raison et du dernier indice, n :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 . n + \frac{(n - 1) . n}{2} . r \quad 1.8$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 . (n + 1) + \frac{n . (n + 1)}{2} . r \quad 1.9$$

La démonstration de ces formules est proposée à l'exercice 6.

Exercice à chercher n°6

Utiliser 1.3 et 1.4 pour établir les formules donnant les sommes $(u_0 + \dots + u_n)$ et $(u_1 + \dots + u_n)$ en fonction du premier terme, de la raison et de n , indice du dernier terme.

3.2. Exercices traités

1. Quelle est la somme des 20 premiers termes de la suite (3, 8, 13, ...) de l'exemple 4 du paragraphe 1.1 ?

Numérotions la suite à partir de 0 : $u_0 = 3$

Le vingtième terme, u_{19} , est donné par 1.3 : $u_{19} = u_0 + 19r = 3 + 19 \times 5 = 98$

D'après 1.6 avec $n = 19$: $S = \frac{(u_0 + u_{19})}{2} . 20 = 1010 .$

2. La suite $(u_3, u_4, \dots, u_9)$ étant arithmétique, calculer sa somme S et sa moyenne M en fonction de u_3 et u_9 . Donner sa raison r .

D'après la formule 1.7, en notant qu'il y a 7 termes $(9 - 3 + 1 = 7)$:

$$S = \frac{(u_3 + u_9) \cdot 7}{2}$$

La moyenne étant la somme divisée par le nombre de termes :

$$M = \frac{u_3 + u_9}{2}$$

Ici on a aussi : $M = u_6$ (terme du milieu d'une suite de 7 termes).

De u_3 à u_9 , on a ajouté la raison 6 fois $(9 - 3)$; donc,

$$r = \frac{u_9 - u_3}{6}$$

On peut aussi tirer r de la formule 1.2 avec $(n = 9 \text{ et } m = 3)$.

3. Calculer la somme des 100 premiers entiers $(1, 2, \dots, 100)$.
Généraliser à la somme des n premiers entiers.

Il s'agit d'une suite arithmétique de raison 1. La formule 1.7 donne :

$$1 + 2 + \dots + 100 = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5050.$$

Plus généralement : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$

Exercice à chercher n°7

On donne la suite : $\{u_0 = 1 ; u_{n+1} = u_n + 4 \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}\}$;
calculer la somme $u_2 + u_3 + \dots + u_{30}$.

4. Suites arithmétiques et fonction du premier degré

Une suite, arithmétique ou non, peut être considérée comme une fonction donnant u_n à partir de l'entier n :

$$n \mapsto u(n) = u_n$$

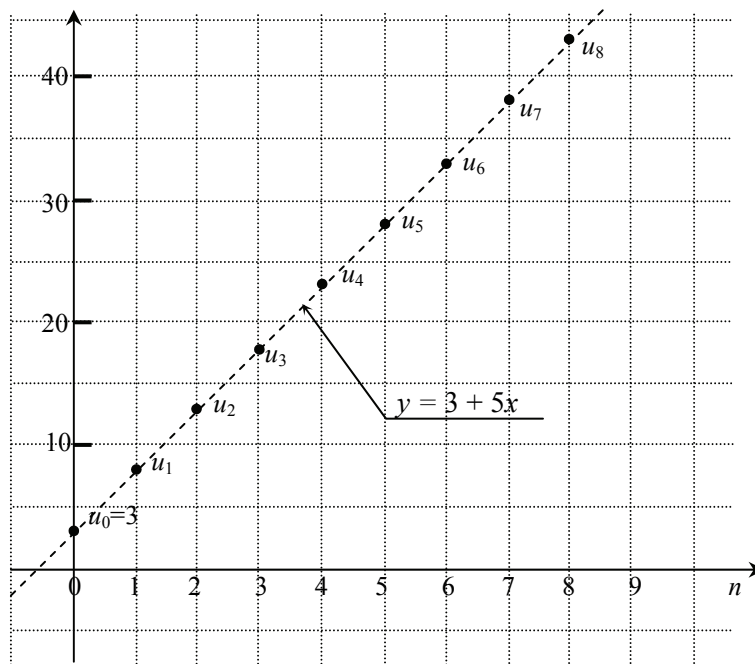
Pour les suites arithmétiques la relation entre n et u_n est donnée par la formule 1.3 nous montrant qu'il s'agit d'une fonction du premier degré.

$$n \mapsto u_n = u_0 + n \cdot r \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

Sur un graphique cartésien (n en abscisse, u_n en ordonnée), la suite est donc représentée par les points d'abscisse entière situés sur la droite d'équation :

$$x \mapsto y(x) = u_0 + x \cdot r \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

Le graphique suivant montre l'alignement des points $(n, u_n = 3 + 5n)$ de la 4^{ème} suite du §1.1 sur la droite d'équation $y = 3 + 5x$.



Notons que la raison de la suite, $r = u_{n+1} - u_n$ (ici 5) est égale au coefficient directeur de la droite.

Cette propriété est générale ; elle résulte de l'interprétation géométrique de la formule 1.2 qui s'écrit aussi :

$$r = \frac{u_n - u_m}{n - m} \quad 1.10$$

où le quotient du second membre n'est autre que la pente, ou coefficient directeur de la droite, calculée entre les abscisses m et n .

Exercice à chercher n°8

Donner une définition par récurrence de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3n - 1$$

Exercice à chercher n°9

Donner une définition directe, $u_n = f(n)$, de la suite récurrente définie sur $\mathbb{N}$:

$$\{u_0 = 2 ; u_{n+1} = u_n - 3\}.$$