# Chapitre I

# Courbes discrètes planes

Les **courbes discrètes planes** (aussi appelées **courbes polygonales**) sont au premier abord des objets très simples : une séquence de points reliés par des arêtes. On peut les voir comme un cas élémentaire de graphe plan. Si la séquence est périodique, la courbe est dite **fermée** (ou périodique).

L'objectif est d'en étudier les propriétés différentielles en suivant la ligne de cet ouvrage, à savoir en caractérisant une quantité différentielle par la propriété géométrique à laquelle elle se rapporte. Pour définir la courbure en fonction des quantités discrètes naturelles que sont les longueurs et les angles, on cherchera des propriétés analogues à celles de courbes continues. Or force sera de constater que différentes propriétés géométriques débouchent sur différentes notions de courbure discrète, et de fait certaines notions passent difficilement — ou différemment — du continu au discret. Cette différence est simple à comprendre dans le cas plan ; on la retrouvera sous une forme plus complexe dans le cas des surfaces de l'espace.

Les trois définitions [1] continues de la courbure que nous prendrons comme modèle seront :

1. la courbure vue comme variation de l'angle de la tangente (approche de GAUSS–BONNET) :
$$\kappa = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$$
où $\varphi$ relève l'angle du vecteur tangent et $s$ est la **longueur d'arc** ; dans ce cas la courbure mesure la vitesse à laquelle la tangente tourne par unité de longueur ;
2. la courbure par approximation : $\kappa = 1/r$ au point $p$, où $r$ est le rayon du cercle passant par $p$ qui « colle le mieux » à la courbe, appelé **cercle osculateur** (en particulier il est tangent à la courbe) ;
3. la courbure liée aux variations de longueur (approche de STEINER) : quand on déforme la courbe $t \mapsto \gamma(t)$ en une courbe parallèle $t \mapsto \gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t) + \varepsilon\vec{n}(t)$, où $\vec{n}$ est

1. Ces définitions supposent évidemment des hypothèses de régularité sur la courbe, typiquement que celle-ci soit une courbe paramétrée $t \mapsto \gamma(t)$ de classe $\mathscr{C}^2$, et *régulière* au sens où $\gamma'(t)$ ne s'annule jamais.

le vecteur normal et $f$ une fonction quelconque, la longueur de la courbe déformée est donnée par la formule de STEINER (A.3) :

$$L(\gamma_\varepsilon) = L(\gamma) - \varepsilon \int \kappa(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

De façon plus générale, quand on déforme $\gamma$ en $\gamma + \varepsilon f \vec{n}$, la variation de la longueur est donnée par

$$L(\gamma_\varepsilon) = L(\gamma) - \varepsilon \int f(s)\kappa(s)\,\mathrm{d}s + o(\varepsilon)\,.$$

Ainsi la courbure $\kappa$ mesure-t-elle les variations de longueur au premier ordre en $\varepsilon$.

*Note* 1. Même si cela enrichit cette étude (et est, à ce titre, recommandé), il n'est absolument pas nécessaire de connaitre les formules ci-dessus pour comprendre la suite. L'approche discrète est techniquement beaucoup plus élémentaire. Nous référons néanmoins le lecteur à [Pha99], [Laf10] ou [MR05], ainsi qu'à la section A.1 de l'annexe pour un (très) rapide survol des notions et formules.

# 1 Courbes discrètes et variation angulaire

Une **courbe discrète** ou **courbe polygonale** plane est la donnée d'une suite (finie ou infinie) de points $p_i$ du plan, appelés **sommets**, reliés par des segments $e_i = (p_i p_{i+1})$ appelés **arêtes**, notés aussi $[p_i, p_{i+1}]$. Si $p_{n+i} = p_i$, la courbe est dite **périodique** ou **fermée**. Nous n'excluons pas que les arêtes se croisent ou que certains sommets coïncident, mais il est en général requis que les arêtes soient de longueur non nulle, ou, ce qui est équivalent, que deux sommets consécutifs soient distincts ; la courbe est dite **régulière** ou **non-dégénérée** ou **immergée**.

On définit la longueur $\ell_i = \|\overrightarrow{p_i p_{i+1}}\|$ de l'arête $(p_i p_{i+1})$ et la longueur totale $L$ comme la somme des longueurs (dans le cas d'un nombre fini de points) : $L = \sum_i \ell_i$. Dans le plan, l'autre invariant naturel est l'**angle de rotation** $\theta_i$ entre les vecteur $\overrightarrow{p_{i-1}p_i}$ et $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$, qui est choisi entre $-\pi$ et $\pi$. (Attention : ce n'est pas l'angle entre les deux segments, qui est dans ce cas de $\pi - \theta_i$.) Le cas limite où l'angle est $\pm\pi$ correspond à deux arêtes superposées, autrement dit un point de rebroussement, et le choix du signe dépendra du contexte (par exemple si la courbe borde un domaine du plan).

Longueurs et angles de rotation sont les seuls invariants [2]. En effet, on peut démontrer (beaucoup plus simplement que dans le cas continu) l'analogue du théorème de BONNET plan : *la donnée d'une suite de longueurs* $(\ell_i)$ *et d'angles* $(\theta_i)$ *détermine toujours une courbe polygonale, et celle-ci est unique à translation et rotation près.* Car il suffit de fixer un point de départ $p_0$ et une direction de départ $\vec{v}_0$ de longueur 1 pour fixer le point suivant (ou précédent) via $p_1 = p_0 + \ell_0 \vec{v}_0$ ; le vecteur $\vec{u}_1$ est déterminé par $(\vec{v}_0, \vec{v}_1) = \theta_1$, ce qui permet de construire $p_2$ et ainsi de suite.

Intuitivement, l'angle de rotation $\theta_i$ semble jouer le rôle de la courbure dans le cadre discret : si la courbe discrète reste droite le long des arêtes $(p_{i-1}p_i)$ et $(p_i p_{i+1})$,

2. Comme longueur et courbure en géométrie euclidienne (noter que dans le théorème de BONNET la longueur est implicite).

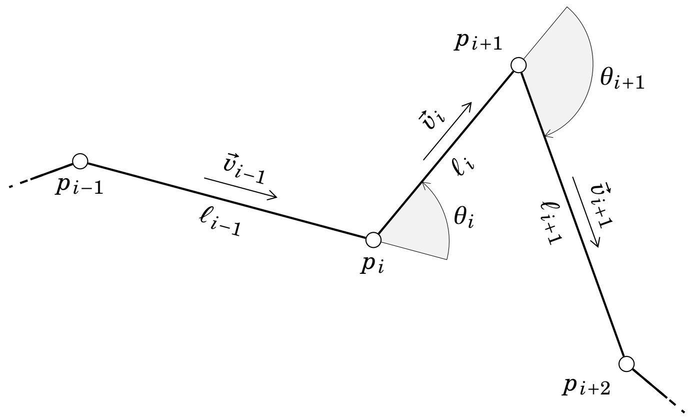


FIGURE 1 – Courbe discrète avec angles de rotation $\theta_i$, longueurs $\ell_i$ et vecteurs directeurs $\vec{v}_i$.

elle ne possède pas de courbure ($\theta_i = 0$), et quand elle tourne vers sa gauche elle est courbée positivement, et négativement vers sa droite. On retrouve même l'analogue du cas continu. Pour une courbe continue régulière,

$$\kappa = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$$

où $\varphi$ est l'angle du vecteur tangent $\vec{t}$ : $\vec{t} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Ainsi la variation angulaire entre deux positions $s_1, s_2$ est

$$\theta = \Delta\varphi = \varphi(s_2) - \varphi(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \kappa(s)\,\mathrm{d}s$$

(théorème de GAUSS–BONNET local, cf. théorème A.1, page 163, en annexe). Pour une courbe discrète non-dégénérée, vue comme une courbe continue par morceaux, on note $\vec{v}_i := (\overrightarrow{p_i p_{i+1}})/\ell_i$ le vecteur directeur de l'arête $(p_i p_{i+1})$ — autrement dit le vecteur tangent — et alors $\theta_i = (\vec{v}_{i-1}, \overrightarrow{v_i})$ représente bien la variation d'angle de la tangente.

*Remarque* 1. On peut tout aussi bien considérer le vecteur normal $\vec{n}$ au lieu du vecteur tangent[3] $\vec{t}$, mais contrairement au continu, on ne peut définir aisément la normale aux sommets (voir plus bas néanmoins). Par contre la normale le long d'une arête est bien

3. Ce qui est équivalent pour les courbes planes mais pas pour les courbes gauches. Pour les surfaces, il sera indispensable de considérer le vecteur normal, car il n'y a pas un seul vecteur tangent mais un plan tangent.

définie : sur l'arête $e_i = (p_i p_{i+1})$, $\vec{n}_i$ est le vecteur de longueur 1, orthogonal à $\vec{v}_i$ et tel que la base $(\vec{v}_i, \vec{n}_i)$ soit positivement orientée (c-à-d que $\vec{n}_i$ pointe vers la gauche de la courbe, par rapport au sens de parcours). On peut caractériser la courbure continue comme la variation infinitésimale du vecteur normal, ce qui découle directement de la formule $\vec{n} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$.

Cette définition de la courbure par les angles $\theta_i$ satisfait le théorème de GAUSS–BONNET, à condition de considérer que la courbure est nulle le long des arêtes, et infinie au sommet, d'intégrale égale à $\theta_i$ (mathématiquement on dira que $k_i = \theta_i$ est une masse de DIRAC en $p_i$). Il vient alors

$$\int \kappa \mathrm{d}s = \sum_i \theta_i \,.$$

Cela permet en particulier de retrouver les conséquences topologiques de GAUSS–BONNET : si la courbe est fermée (c-à-d $p_{n+i} = p_i$ pour un certain $n$), on peut définir le **nombre de tours** (*rotation number* ou *winding number*)

$$N = \frac{1}{2\pi} \sum_1^n \theta_i$$

qui clairement ne dépend pas du point de départ de la courbe. La périodicité garantit que ce nombre est un entier. En effet, attribuons un angle $\varphi_i$ à $\overrightarrow{v_i}$, de sorte que $\overrightarrow{v_i} = (\cos\varphi_i, \sin\varphi_i)$ ; $(\varphi_i)$ est appelé un **relèvement** des vecteurs $\vec{v}_i$. Cette mesure d'angle $\varphi_i$ n'est pas unique mais définie à $2\pi$ près. Par contre, dès que l'on en a fixé un (par exemple $\varphi_1$), les autres se déduisent de proche en proche puisque $\varphi_i - \varphi_{i-1} = \theta_i$. Or, dans cette définition, rien ne dit que $\varphi_{i+n}$ sera égal à $\varphi_i$ ; mais ils seront toujours congrus modulo $2\pi$, puisqu'ils correspondent à un même vecteur $\vec{v}_i$. En particulier il existe un entier relatif $N$ tel que $\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi N$. Alors

$$\sum_1^n \theta_i = \sum_1^n (\varphi_i - \varphi_{i-1}) = \varphi_n - \varphi_0 = 2\pi N \ \text{ pour } N \in \mathbb{Z}.$$

Cette conception de la courbure comme une mesure concentrée aux sommets a néanmoins plusieurs défauts : (i) on ne travaille plus avec des fonctions mais avec des mesures, et (ii) on perd tout autant l'homogénéité : ces mesures (les angles $\theta_i$) ne changent pas quand une arête s'allonge indépendamment des autres, ce qui ne correspond pas à notre notion intuitive de courbure. C'est la conséquence logique du fait que $\theta_i$ est une quantité intégrale là où la courbure $\kappa$ dans le cas continu est une quantité dérivée ($\theta_i$ valant $\int \kappa \mathrm{d}s$). Une façon de compenser ce phénomène est de diviser la courbure par un facteur lié à la longueur et de poser

$$\kappa_i = \frac{2\theta_i}{\ell_{i-1} + \ell_i} \tag{1}$$

ce qui donne l'homogénéité recherchée. On retrouve aussi la définition de la courbure comme un quotient entre angle et longueur. En effet, on considère la normale $\vec{n}$ comme une application à valeur dans le cercle unité et on considère la longueur de son image (appelée **image de GAUSS**) entre deux positions successives. Or cette longueur est simplement la variation $\varphi(s_2)-\varphi(s_1)$. L'équation continue $\kappa = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$ est le quotient infinitésimal entre la longueur de l'image de GAUSS $\mathrm{d}\varphi$ et la longueur le long de la courbe $\mathrm{d}s$. La définition 1 ci-dessus revient à échantillonner notre courbe discrète en les milieux $m_i$ de chaque arête, la distance le long de la courbe entre $m_{i-1}$ et $m_i$ étant $\frac{\ell_{i-1}+\ell_i}{2}$.

Plus généralement, cela équivaut à remplacer les fonctions définies en des points (ou des mesures de DIRAC) par des fonctions interpolantes. L'exemple ci-dessus revient à interpoler par des fonctions constantes par morceaux, discontinues aux milieux des arêtes. Un autre exemple simple est celui des fonctions affines par morceaux (aussi appelées PL pour *piecewise linear*, cf. annexe C). On considère que la fonction courbure est une fonction affine de la longueur d'arc, valant $\kappa_i$ en $p_i$ ; dès lors, entre $p_i$ et $p_{i+1}$, tout point s'écrit $p = p(t) = (1-t)p_i + tp_{i+1}$ et on pose

$$\kappa(t) = (1-t)\kappa_i + t\kappa_{i+1}.$$

En intégrant le long d'une courbe fermée $p_1, \ldots, p_n$, il vient

$$\int \kappa \,\mathrm{d}\ell = \sum_{i=1}^{n} \int_{p_i}^{p_{i+1}} \kappa \,\mathrm{d}\ell = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \kappa(t)\ell_i \,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\kappa_i + \kappa_{i+1}}{2} \ell_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\ell_{i-1}+\ell_i}{2} \kappa_i .$$

(Sur une courbe finie non fermée, il y a des termes isolés aux extrémités.) Si l'on veut retrouver GAUSS–BONNET, il faut choisir $\frac{\ell_{i-1}+\ell_i}{2}\kappa_i = \theta_i$. Mais on peut bien sûr choisir d'autres interpolations que la linéaire pour la courbure (par exemple des splines).

## 2 Cercles osculateurs discrets

Une autre approche, classique, de la courbure vient de l'approximation de la courbe par un cercle. Le cercle dit **osculateur** est, parmi les cercles tangents à la courbe en $p$, celui qui *« colle le mieux »* à celle-ci, autrement dit coïncide à l'ordre 2 (tandis que la tangente ne coïncide qu'à l'ordre 1). Le rayon $R$ du cercle osculateur est l'inverse de la courbure $\kappa$ (et si la courbure est nulle le cercle dégénère en une droite).

Cette définition ne s'applique évidemment pas directement à une courbe polygonale. On peut néanmoins l'adapter, et de plusieurs façons.

Un premier choix est naturel : prenons le cercle circonscrit aux trois points consécutifs $p_{i-1}, p_i, p_{i+1}$ ; la **courbure de MENGER** est l'inverse du rayon $r$ de ce cercle circonscrit. On calcule que

$$\kappa_i = \kappa(p_i) = \frac{1}{r_i} = \frac{4\,\mathrm{aire}(p_{i-1}p_ip_{i+1})}{\|\overrightarrow{p_ip_{i-1}}\|\|\overrightarrow{p_ip_{i+1}}\|\|\overrightarrow{p_{i+1}p_{i-1}}\|} = \frac{2\sin\alpha_i}{\|\overrightarrow{p_{i-1}p_{i+1}}\|} = \frac{2\sin\theta_i}{\|\overrightarrow{p_{i-1}p_{i+1}}\|} \qquad (2)$$

où $\alpha_i = \pi - \theta_i$ est l'angle en $p_i$ du triangle $(p_{i-1}p_ip_{i+1})$. Noter que cette quantité peut être négative, ce qui correspond à une courbe tournant vers sa droite (le rayon étant alors compté négativement).

Si les points sont alignés sur une droite et consécutifs, il n'y a pas de cercle circonscrit mais une droite, ce qui donne une courbure nulle (et en effet on peut considérer la droite comme le cas limite du cercle quand son rayon tend vers l'infini).

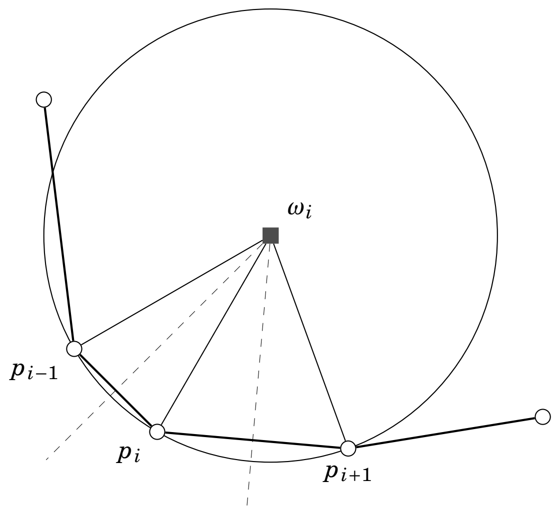


FIGURE 2 – Cercle circonscrit à trois sommets consécutifs. Le centre du cercle $\omega_i$ est l'intersection des médiatrices de deux arêtes $(p_{i-1}p_i)$ et $(p_ip_{i+1})$. L'inverse de son rayon est la courbure de MENGER.

La courbure de MENGER dépend de la longueur des arêtes, ce que l'on peut (ou non) compenser en prenant des arêtes de longueur constante, analogue discret de la paramétrisation par longueur d'arc. Elle présente une incohérence importante comparée au cas continu : les points de rebroussement (quand $\overrightarrow{p_{i-1}p_i}$ et $\overrightarrow{p_ip_{i+1}}$ sont parallèles et de sens opposé), qui, dans le cas continu, possèdent une courbure infinie. Ici, si les longueurs sont identiques, $p_{i-1} = p_{i+1}$, et il y a une infinité de cercles passant par $p_i$ et $p_{i-1} = p_{i+1}$, dont le plus petit est de rayon 2 ; la courbure de MENGER est donc mal définie, et comprise entre 0 et 1/2. Et si $p_{i-1} \neq p_{i+1}$, alors il n'y a pas de cercle passant par ces trois points, mais une droite, donc de courbure nulle, ce qui est absurde dans ce cas.

Une seconde possibilité consiste à prendre le cercle tangent à trois arêtes consécutives $(p_{i-1}p_i)$, $(p_ip_{i+1})$ et $(p_{i+1}p_{i+2})$, ce qui n'est possible que si les deux angles consécutifs $\theta_i, \theta_{i+1}$ sont de même signe (formant un « U » et non un « Z »). On peut donc construire ces cercles osculateurs pour des courbes **localement convexes**, c-à-d dont les angles $\theta_i$ sont de signe constant. La courbure est alors une fonction attachée aux arêtes et non aux sommets.

Sur l'arête $e_i = (p_ip_{i+1})$

$$\kappa_i = \kappa(e_i) = \frac{1}{r_i} = \frac{1}{\ell_i}\frac{\tan\frac{\alpha_i}{2} + \tan\frac{\alpha_{i+1}}{2}}{\tan\frac{\alpha_i}{2}\tan\frac{\alpha_{i+1}}{2}} = \frac{1}{\ell_i}\frac{\cot\frac{\theta_i}{2} + \cot\frac{\theta_{i+1}}{2}}{\cot\frac{\theta_i}{2}\cot\frac{\theta_{i+1}}{2}}$$

où $\alpha_i = \pi - \theta_i$. Noter que si $\theta_i = 0$ (les deux arêtes successives $e_{i-1}$ et $e_i$ sont alignées),

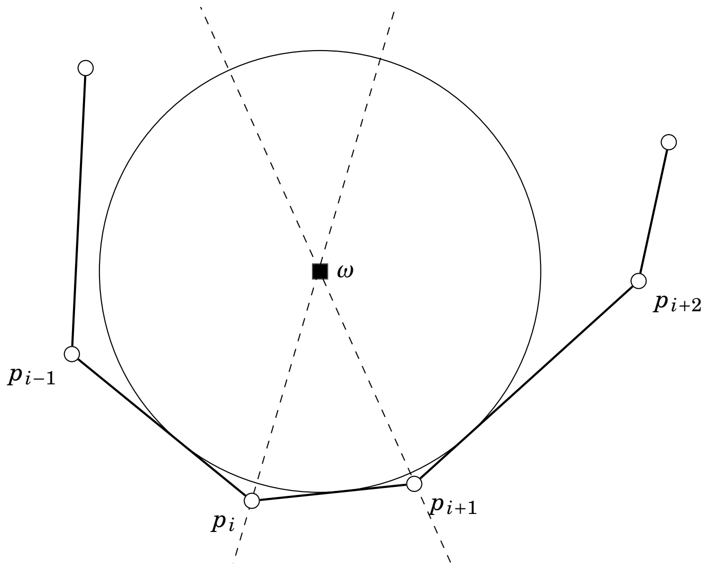


FIGURE 3 – Cercle tangent à trois arêtes consécutives. Le centre du cercle associé à l'arête $e_i = (p_i p_{i+1})$ est l'intersection des deux bissectrices passant par les sommets $p_i$ et $p_i + 1$.

$\cot \frac{\theta_i}{2} = \infty$, mais la définition reste cohérente si l'on prend le cercle tangent à $e_i$ et $e_{i+1}$ en leur point commun $p_{i+1}$ ; en passant à la limite, on retrouve $\kappa_i = \frac{\tan(\theta_{i+1}/2)}{\ell_i}$. Si les trois arêtes successives sont alignées, il n'y a pas de cercles tangent mais une droite, et la courbure $\kappa$ est nulle. (On remarquera que la formule ci-dessus s'applique en fait y compris à des courbes non localement convexes, mais on perd l'interprétation géométrique.)

# 3 La courbure comme variation de la longueur

On peut considérer la longueur totale (sous réserve qu'elle soit finie [4]) comme une fonction $L = L(p_1, \ldots, p_n)$ des positions $p_i = (x_i, y_i)$ :

$$L = L(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \ell_i = \sum_{i=1}^{n-1} \|\overrightarrow{p_i p_{i+1}}\| = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

autrement dit une fonction de $2n$ variables réelles. Tant que les points sont distincts, cette fonction est différentiable. Pour mesurer l'influence de la position du point $p_i$

4. Ou même dans le cas d'une longueur totale infinie, en ne considérant qu'un morceau de la courbe, par exemple $p_{i-1}, p_i, p_{i+1}$.

sur $L$, on calcule son **gradient partiel** en fonction de $p_i$. Rappelons que

$$\|\vec{v}+\vec{u}\| = \|\vec{v}\| + \vec{u}\cdot\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} + \frac{\|\vec{v}\|}{2}\left(\left\|\frac{\vec{u}}{\|\vec{v}\|}\right\|^2 - \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{v}\|}\cdot\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)^2\right) + o(\|\vec{u}\|^2)$$

où $o(\|\vec{u}\|^2)$ dénote un terme négligeable devant $\|\vec{u}\|^2$. (Remarquons en passant que le terme quadratique est toujours positif ou nul, et nul si et seulement si $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.) Alors, si l'on déplace le $i$-ème sommet $p_i$, seules les longueurs $\ell_{i-1}$ et $\ell_i$ changent et

$$\begin{aligned}L(p_1,\dots,p_{i-1},p_i+\vec{u},p_{i+1},\dots,p_n) \quad = \quad & L(p_1,\dots,p_{i-1},p_i,p_{i+1},\dots,p_n)\\ & +(\vec{v}_{i-1}-\vec{v}_i)\cdot\vec{u}\\ & +\frac{\|\vec{u}\|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v}_{i-1})^2}{2\ell_{i-1}} + \frac{\|\vec{u}\|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v}_i)^2}{2\ell_i} + o(\|\vec{u}\|^2)\end{aligned}$$

où $\vec{v}_i := (\overrightarrow{p_ip_{i+1}})/\ell_i$ est le vecteur directeur orienté de longueur 1 de l'arête $(p_ip_{i+1})$. Par conséquent le gradient partiel en $p_i$ de la fonction longueur est $\vec{v}_{i-1}-\vec{v}_i$, et par analogie avec le cas continu, nous appellerons **vecteur courbure moyenne** $\vec{H}_i$ l'opposé du gradient :

$$\vec{H}_i = \vec{H}(p_i) = \vec{v}_i - \vec{v}_{i-1}\,.$$

Le vecteur courbure moyenne pointe le long de la bissectrice *intérieure* de l'angle en $p_i$ et c'est par conséquent la direction dite *de plus grande pente* pour $L$, c-à-d que $\vec{H}_i$ indique comment déplacer $p_i$ pour diminuer la longueur totale *le plus efficacement possible*. On constate évidemment que $\vec{H}_i$ dépend des points voisins ; de plus sa longueur est $\|\vec{H}_i\| = 2\left|\sin\frac{\theta_i}{2}\right|$. En particulier si le point est plat ($\theta_i = 0$), on ne peut pas changer la longueur à l'ordre 1 en déplaçant $p_i$ (et même, la longueur ne peut qu'augmenter, comme le montrent les formules et la remarque ci-dessus). À l'inverse, si le segment est replié ($\theta_i = \pi$) la longueur de $\vec{H}_i$ est 2. On peut alors définir la courbure en $p_i$ comme la longueur algébrique de $\vec{H}_i$ (avec un signe donc) :

$$H_i = 2\sin\frac{\theta_i}{2}\cdot$$

Cette courbure est appelée courbure moyenne et pour les courbes continues planes elle coïncide avec la courbure usuelle ; on verra qu'il en va autrement pour les surfaces de l'espace.

*Remarque* 2. On ne peut pas reprendre cette définition pour la courbure aux sommets extrémités, puisqu'il manque un point (précédent ou suivant), un défaut que l'on retrouve dans la plupart des définitions. Pourtant ici le gradient de l'aire est bien défini et vaut $-\vec{v}_1$ en $p_1$ et $\vec{v}_{n-1}$ en $p_n$, qui sont donc de longueur 1.

On généralise l'idée de déformation ponctuelle à une déformation globale de la courbe : si $\overrightarrow{u_i}$ est une suite de déplacements des sommets $p_i$, alors

$$L(p_1+\varepsilon\vec{u}_1,\dots,p_n+\varepsilon\vec{u}_n) = L(p_1,\dots,p_n) - \varepsilon\sum_i \overrightarrow{u_i}\cdot\vec{H}_i + o(\varepsilon).$$