Sujet 2017

Exercice 1 ....

On considère la fonction *f* qui à tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

1) Justifier que *f* est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

2) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de *f*.

b) Montrer que le gradient de *f* est nul si, et seulement si : $\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$.

c) En déduire que *f* possède trois points critiques :

$$(0,0),\ \left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

3) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de *f*.

b) Écrire la matrice hessienne de *f* en chaque point critique.

c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que *f* admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

d) Déterminer les signes de $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ au voisinage de $x = 0$.

Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de *f*.

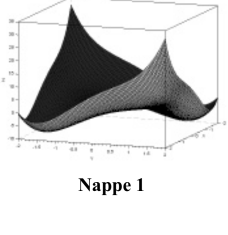
4) a) Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2$.

b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de *f* ?

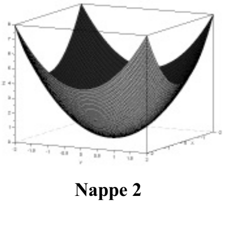
5) a) Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction *f*.

```
function z=f(x,y)
z=-------
endfunction
x=linspace(-2,2,101)
y=x
fplot3d(x,y,f)
```

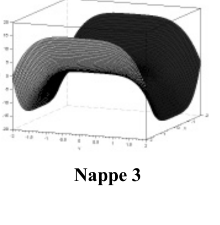
b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1, e_2 étant définies par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $e_0(t) = 1$, $e_1(t) = t$ et $e_2(t) = t^2$.

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\varphi(P)\big)(x) = \int_0^1 P(x+t)\,dt$$

1) a) Montrer que φ est linéaire.

b) Déterminer $\big(\varphi(e_0)\big)(x)$, $\big(\varphi(e_1)\big)(x)$ et $\big(\varphi(e_2)\big)(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaisons linéaires de e_0, e_1, e_2.

c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.

2) a) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2). On vérifiera que la première ligne de A est $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b) Justifier que φ est un automorphisme de E.

c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3) Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour que soit affichée la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
A=[------]
disp(------)
```

4) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donner u_0 et établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$.

b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier naturel n.

c) Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

Exercice 3

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

On pose $W = -\ln V$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont la fonction de répartition est notée F_W. On dit que W suit la loi de Gumbel.

1) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_W\left(x\right) = e^{-e^{-x}}$.

b) En déduire que W est une variable à densité.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et par $X_1,...,X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant la même loi que V, c'est-à-dire la loi $\mathcal{E}(1)$.

On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2,..., X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max\left(X_1(\omega), X_2(\omega),..., X_n(\omega)\right)$. On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2) a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}\left(x\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \left(1-e^{-x}\right)^n \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

3) a) Donner un équivalent de $1-F_{Y_n}\left(t\right)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\left(1-F_{Y_n}\left(t\right)\right)dt$ est convergente.

b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x \left(1-F_{Y_n}\left(t\right)\right)dt = x\left(1-F_{Y_n}\left(x\right)\right) + \int_0^x t\, f_{Y_n}\left(t\right)dt$$

c) Utiliser l'équivalent trouvé à la question 2b) pour montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1-F_{Y_n}\left(x\right)\right) = 0$$

d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$E\left(Y_n\right) = \int_0^{+\infty}\left(1-F_{Y_n}\left(t\right)\right)dt$$

4) a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1-e^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x \left(1-F_{Y_n}\left(t\right)\right)dt = \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}du$$

b) En déduire que $\int_0^x \left(1-F_{Y_n}\left(t\right)\right)dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1-e^{-x}\right)^k}{k}$, puis donner $E\left(Y_n\right)$ sous forme de somme.

5) On pose $Z_n = Y_n - \ln n$.

a) On rappelle que `grand(1,n,'exp',1)` simule n variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Compléter la déclaration de fonction `Scilab` suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Z_n.

```
function Z=f(n)
x = grand(1,n,'exp',1)
Z =------
endfunction
```

b) Voici deux scripts (celui de droite utilise la fonction `f` définie ci-dessus) :

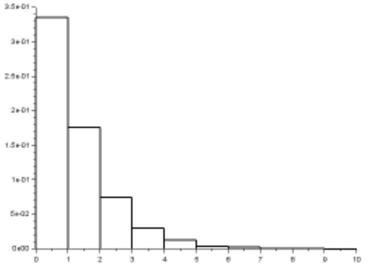
```
V=grand(1,10000,'exp',1)
W=-log(V)
s=linspace(0,10,11)
histplot(s,W)
```

Script (1)

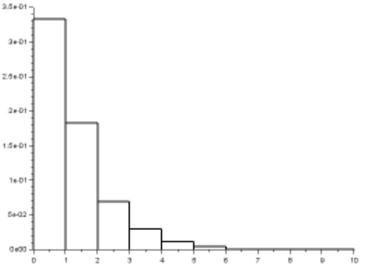
```
n=input('entrez n : ')
Z=[] // Z est vide
for k=1:10000
    Z=[Z,f(n)]
end
s=linspace(0,10,11)
histplot(s,Z)
```

Script (2)

Chacun de ces scripts simule 10 000 variables mutuellement indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0,1]$, $]1,2]$, $]2,3]$, …, $]9,10]$, et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).
Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi de Gumbel (loi suivie par W), renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que Z_n, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.



Histogramme (1)



Histogramme (2) pour $n = 1000$

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des variables aléatoires (Z_n).

6) On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.

a) Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln n)$.

b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.

c) Montrer que, pour tout réel x, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$.

d) Démontrer le résultat conjecturé à la question 5b).

Problème ....

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire.

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant : • Au départ, le mobile est sur le sommet 1.

• Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1) Donner la loi de X_1, ainsi que l'espérance $E(X_1)$ de la variable aléatoire X_1.

On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3},\ P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}$$

2) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner l'ensemble des valeurs prises par X_n.

3) a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\big(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) \big)$$

b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

c) Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$$

En déduire l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$.

d) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

4) a) En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\big(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) \big)$.

b) En déduire une relation entre $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_n = 2)$.

c) Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

5) On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3} \text{ et } P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) & P(X_n = 4) \end{pmatrix}$$

7) a) Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n A$.

b) Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 A^n$.

c) En déduire la première ligne de A^n.

8) Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n, puis écrire ces trois lignes.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A.

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9) Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

10) a) Calculer J^2 puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $J^k = 4^{k-1}J$.

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J.

c) Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.

Partie 4 : informatique.

11) a) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il affiche les 100 premières positions, autres que celle d'origine, du mobile dont le voyage est étudié dans ce problème, ainsi que le nombre n de fois où il est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours de ses 100 premiers déplacements (on pourra utiliser la commande `sum`).

```
A=[-----]/3
x=grand(100,'markov',A,1)
n=------
disp(x)
disp(n)
```

b) Après cinq essais, les réponses concernant le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet numéroté 1 sont $n = 23$, $n = 28$, $n = 23$, $n = 25$ et $n = 26$. En quoi est-ce normal ?

Conseils 2017

Exercice 1 ....

❖ Conseils de méthode

1) La fonction f est une fonction polynomiale de deux variables et c'est suffisant.

2) a) Pour trouver $\partial_1(f)(x,y)$, on dérive $f(x,y)$ par rapport à x (la première variable) en considérant y comme une constante.
Pour trouver $\partial_2(f)(x,y)$, on dérive $f(x,y)$ par rapport à y (la deuxième variable) en considérant x comme une constante.

c) Il est pratique de procéder à la transformation $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et d'utiliser une propriété de la fonction "cube".

3) a) Il faut dériver, par rapport à x et par rapport à y, les deux dérivées partielles d'ordre 1.

b) La matrice hessienne de f en (x,y) est :

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) & \partial^2_{1,2}(f)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) & \partial^2_{2,2}(f)(x,y) \end{pmatrix}$$

c) Il faut calculer le déterminant de $\nabla^2(f)(x,y) - \lambda I$ en chaque point critique de f, ce qui donne les valeurs propres des hessiennes qui permettent de trancher pour deux des points critiques.
La valeur du minimum est l'image par f de chacun des points critiques.

d) On trouve que les signes de $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ au voisinage de 0 sont opposés.

4) a) Il suffit de développer et de réduire.

b) Le calcul précédent prouve que, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) \geq -8$, avec égalité si (x,y) est un des points critiques en lesquels il y a un minimum local.

5) b) La deuxième nappe montre un seul minimum global, la troisième n'en montre aucun, conclusion ?

❖ Conseils de rédaction

1) Éviter de parler de somme de fonctions de classe C^2 sans reconnaître un polynôme !

2) a) Il est bien de respecter les notations imposées par le programme.
c) Prière d'argumenter avant de lâcher que $y = -x$!!!

3) c) Il faut absolument écrire que les valeurs propres sont toutes les deux *strictement* positives.

4) b) Il faut montrer que l'on sait qu'une somme de carrés est positive ou nulle.

5) a) Ne pas oublier le "chapeau" pour la fonction puissance et l'étoile pour le produit.
b) On peut bien sûr répondre au pifomètre, mais ça ne rapporte rien !

❖ Aide à la résolution

2) c) Ayant $y^3 = -x^3$ que l'on peut écrire (par imparité de la fonction "cube") $y^3 = (-x)^3$, on bénéficie alors de la bijectivité de la fonction "cube".

3) c) L'une des trois hessiennes admet 0 comme valeur propre, les autres ont des valeurs propres strictement positives.
d) Comme $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ ont des signes opposés au voisinage de 0, il n'est pas possible de trouver un voisinage V de $(0,0)$ pour lequel on aurait, pour tout (x,y) de V, $f(x,y) \geq 0$ ou $f(x,y) \leq 0$ puisque V contient des couples (x,x) et des couples $(x,-x)$.

4) b) La fonction f n'aurait-elle pas –8 comme minimum global ?

5) b) La première nappe est la bonne !

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

1) Il ne faut absolument pas écrire des choses comme « la fonction est dérivable deux fois et les dérivées secondes sont continues » : la notion de "dérivabilité" ne concerne que les fonctions d'une variable.
Il ne faut pas, non plus, citer la classe C^2 de fonctions d'une variable, comme par exemple $x \mapsto x^4$.

2) c) • Avec $y^3 = -x^3$, pas question d'en déduire sans argumenter que $y = -x$. On pourrait se demander ce qu'il en aurait été avec au départ l'égalité $y^2 = -x^2$! Conclurait-on que $y = -x$? Non, bien sûr.

• Le pire était de se contenter de vérifier que les trois points critiques donnés par l'énoncé faisaient l'affaire : ça ne rapportait rien…