# Sujet 2013

## Exercice 1

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$.

**1) a)** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

**b)** Étudier les variations de la suite $(u_n)$.

**c)** Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)$ converge et donner sa limite.

**2) a)** Écrire une fonction Pascal qui renvoie la valeur de $u_n$.

**b)** En déduire un programme Pascal, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de $n$ pour laquelle on a : $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.

**3)** Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

**a)** Pour tout entier naturel $k$, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de $v_k$.

**b)** Simplifier, pour tout entier naturel $n$ non nul, la somme $\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1})$.

**c)** Donner pour finir la nature de la série de terme général $v_n^2$ ainsi que la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.

## Exercice 2

**1)** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**a)** Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer $A^3$.

**b)** Déterminer une base $(a)$ de Ker$f$ ainsi qu'une base $(b, c)$ de Im$f$.

**c)** Montrer que Im$f^2$ = Ker$f$.

Dans la suite, on considère un endomorphisme $g$ de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$, ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul.

En désignant par $M$ la matrice de $g$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, on a donc :

$$M^2 \neq 0 \text{ et } M^3 = 0$$

On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\operatorname{Im} g^2 = \operatorname{Ker} g$.

**2) a)** Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de $g$.

**b)** Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement valeur propre de $g$.

**c)** En déduire, toujours en raisonnant par l'absurde, que $g$ n'est pas diagonalisable.

**3) a)** Justifier qu'il existe un vecteur $u$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.

**b)** Montrer que $(\, u, g(u), g^2(u)\,)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.

**c)** Donner la matrice $N$ de $g$ dans la base $\mathcal{B}'$.

**d)** Déterminer $\operatorname{Im} g$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\operatorname{Ker} g$. Pour finir, déterminer $\operatorname{Im} g^2$ puis conclure.

## Exercice 3 ........................................................................

Dans cet exercice, la lettre $n$ désigne un entier naturel.
On dispose d'une urne contenant au départ $n$ boules blanches et $(n+2)$ boules noires. On dispose également d'une réserve infinie de boules blanches et de boules noires.
Pour tout entier naturel $j$, on dit que l'urne est dans l'état $j$ lorsqu'elle contient $j$ boules blanches et $(j+2)$ boules noires. Au départ, l'urne est donc dans l'état $n$.

On réalise une succession d'épreuves, chaque épreuve se déroulant selon le protocole suivant :
Pour tout entier naturel $j$ non nul, si l'urne est dans l'état $j$, on extrait une boule au hasard de l'urne.

- Si l'on obtient une boule blanche, alors cette boule n'est pas remise dans l'urne et on enlève de plus une boule noire de l'urne, qui est alors dans l'état $j-1$.
- Si l'on obtient une boule noire, alors cette boule est remise dans l'urne et on remet en plus une boule blanche et une boule noire dans l'urne, qui est alors dans l'état $j+1$.

**1)** Dans cette question, on suppose que $n = 1$ (l'urne contient donc une boule blanche et 3 boules noires) et on note $X_1$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches encore présentes dans l'urne après la première épreuve et $X_2$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches encore présentes dans l'urne après la deuxième épreuve.
On admet que $X_1$ et $X_2$ sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

**a)** Donner la loi de $X_1$.

**b)** Utiliser la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de $X_2$.

**c)** Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite ci-dessus.

On rappelle que random($n$) renvoie au hasard un entier compris entre 0 et $n-1$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et pour qu'il affiche les valeurs des variables aléatoires $X_1$ et $X_2$.

```
Program simul ;
Var X1, X2, tirage : integer ;
Begin
Randomize ;
tirage : = random(4) ; If tirage = 0 then X1 : = ------ else X1 : = ------ ;
If (X1 = 0)  then  X2 : = ------
              Else  begin    tirage : = random(6) ;
                             If tirage <= 1 then X2 : = ------ else X2 : = ------ ;
                    end ;
Writeln (X1, X2) ;
end.
```

On revient au cas général ($n$ est donc un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1) et on décide que les tirages s'arrêtent dès que l'urne ne contient plus de boules blanches.
Pour tout $j$ de $\mathbb{N}$, on note alors $E_j$ l'événement : « l'urne est dans l'état $j$ initialement et les tirages s'arrêtent au bout d'un temps fini ». On pose $e_j = P(E_j)$ et l'on a bien sûr $e_0 = 1$.

**2)** Montrer, en considérant les deux résultats possibles du premier tirage (c'est-à-dire au début du jeu lorsque l'urne est dans l'état $n$) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e_n = \frac{n}{2n+2} e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2} e_{n+1}$$

**3) a)** Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n \geq e_{n+1}$.
**b)** En déduire que la suite $(e_n)$ est convergente.

**On admet pour la suite que $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$**

**4)** Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = (n+1)e_n$.
**a)** Pour tout entier naturel $n$ de $\mathbb{N}^*$, écrire $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ et $u_{n-1}$.
**b)** En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ et $e_1$.
**c)** Montrer enfin que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n = (2e_1 - 1)\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{n+1}$.

Déterminer la valeur de $e_1$, puis en déduire, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $e_n$ en fonction de $n$.

## Problème

**1)** On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

**a)** Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$. En déduire sans calcul $\int_{-1}^0 f(x)\,dx$.
**b)** Vérifier que $f$ peut être considérée comme une densité.

On considère dorénavant une variable aléatoire $X$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et admettant $f$ comme densité.

**2) a)** Établir l'existence de l'espérance de $X$, puis donner sa valeur.

**b)** Établir l'existence de la variance de $X$, puis donner sa valeur.

**3)** Montrer que la fonction de répartition de $X$, notée $F_X$, est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2} \quad \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} \quad \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

On pose $Y = |X|$ et on admet que $Y$ est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note $F_Y$ sa fonction de répartition.

**4) a)** Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque $x$ est strictement négatif.

**b)** Pour tout réel $x$ positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction $F_X$.

**c)** En déduire qu'une densité de $Y$ est la fonction $g$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) \text{ si } x \in [0, 1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

d) Montrer que $Y$ possède une espérance et une variance et les déterminer.

**5)** On considère deux variables aléatoires $U$ et $V$, elles aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On pose $I = \text{Min}(U, V)$ et on admet que $I$ est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On rappelle que, pour tout réel $x$, on a $P(I > x) = P([U > x] \cap [V > x])$.

Pour finir, on note $F_I$ la fonction de répartition de $I$.

**a)** Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel $x$.

**b)** En déduire que $I$ suit la même loi que $Y$.

**6)** On considère plus généralement $n$ variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ $(n \geq 2)$, toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $I_n = \text{Min}(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Déterminer la fonction de répartition de $I_n$ et montrer que la suite $(I_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

**7)** Simulation informatique de $Y$.

Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire $Y$.

```
Function y : real ;
Var   u, v : real ;
Begin
   Randomize ;
   u : = ------ ; v : = ------ ;
   If (u < v) then y : = ------ else y : = ------ ;
End ;
```

# Conseils 2013

## Exercice 1 ............................................................................

### ❖ Conseils de méthode

**1) a)** C'est une situation typique du raisonnement par récurrence.

**b)** Pas d'hésitation, on forme $u_{n+1} - u_n$ et on étudie son signe.

**c)** Pour la convergence, utiliser un théorème de limite monotone. Pour le calcul de la limite, passer à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 2} + 1}{2}$.

**2) a)** La récursivité est bien adaptée, mais pas obligatoire.

**b)** L'utilisation d'une boucle "while … do" ou d'une boucle "repeat … until" est incontournable puisque l'on ne sait pas à partir de quelle valeur de $n$ on aura $1 - u_n < 0,001$

**3) a)** Remplacer $v_k$ et $v_{k+1}$ par leurs expressions en fonction de $u_k$ et $u_{k+1}$.

**b)** Il s'agit d'une somme "télescopique" dont la valeur est pratiquement à connaître par cœur. Sinon, on scinde la somme en deux sommes et on effectue le changement d'indice $i = k + 1$ dans la deuxième et les simplifications se "voient".

**c)** Étudier la suite des sommes partielles de la série de terme général $v_n^2$ .

### ❖ Conseils de rédaction

**1) b)** Pas question d'écrire $u_n^2 - 2u_n + 1 \geq 0$ sans donner d'explication : il faut chasser l'implicite !

**c)** Mieux vaut citer la continuité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 1}{2}$ sur $\mathbb{R}$ afin de justifier l'égalité $\ell = f\left(\ell\right)$, où $\ell$ désigne la limite de la suite $\left(u_n\right)$.

**2) a)** En cas de déclaration récursive, attention au décalage d'indice !
On veut calculer $u_n$ et pas $u_{n+1}$ donc il faut écrire : $u$ : = (sqr($u$($n-1$)) +1) / 2 ; et non pas $u$ : = (sqr($u$($n$)) +1) / 2 ;

**b)** On peut se permettre de ne pas réécrire la fonction précédente dans le programme, voire même de ne pas la réutiliser (ce qui est d'ailleurs bien plus efficace du point de vue du temps de calcul !).
Ne pas oublier l'initialisation de la somme avant la boucle « for ».

**3) a)** La forme de la question exige que l'on trouve $v_k - v_{k+1}$ seulement en fonction de $v_k$, et pas autre chose.

**b)** Simplifier une somme, ce n'est pas la transformer en une autre somme, c'est l'écrire sans symbole $\Sigma$.

### ❖ Aide à la résolution

**1) b)** Dans l'expression de $u_{n+1} - u_n$, ne pas oublier que $u_n^{\,2} - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2$.

**2) a)** D'une façon générale, si $(u_n)$ est une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $u_0 = 0$. Il y a deux façons de déclarer une fonction qui renvoie $u_n$

• La déclaration récursive est du type :

if $n = 0$ then $u$ : = 0 else $u$ : = $f(u_{n-1})$ ;

• La déclaration itérative est du type :

*aux* : = 0 ;
For *k* : = 1 to *n* do *aux* : = $f(aux)$ ;
*u* : = *aux* ;

**3) a)** On trouve $v_k - v_{k+1} = u_{k+1} - u_k$ et ensuite, on se souvient de la question 1b).

**b)** Si l'on opte pour un changement d'indice, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{i=1}^{n} v_i$$

**c)** Utiliser la question 3a).

### ❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

**1) a)** • Il est très vilain d'écrire que l'on a $u_n^2 \geq 0$ **grâce à l'hypothèse de récurrence**. C'est toujours vrai !!!...

• Toujours dans la catégorie "vilain", il est moche d'écrire que, comme $u_n \leq 1$, alors $u_n^2 \leq 1$ : il n'y a qu'à prendre $u_n = -3$ pour se convaincre que c'est faux (en fait l'hypothèse sur la positivité de $u_n$ est indispensable).

• La grosse triche ! Il est vrai que $u_n^2 + 1 \geq 1$, mais il ne faut pas en déduire $\frac{u_n^2+1}{2} \leq \frac{1}{2}$ : tous les chemins mènent à Rome, mais certains coûtent très cher…

**b)** • Il est dommage de ne pas reconnaître que $u_n{}^2 - 2u_n + 1$ est une identité remarquable, et pire, de calculer un discriminant et de se tromper !

• Dans la même veine, il est faux d'écrire que $u_n{}^2 - 2u_n + 1$ est positif **car** $u_n$ appartient à $[0, 1[$.

• Pour finir sur le trinôme, il est vraiment inquiétant de lire un tel tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 2x + 1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

Rappelons que $x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$.

• Aucun théorème ne garantit que, lorsqu'une suite $(u_n)$ est définie par la relation $u_{n+1}=f(u_n)$, si $f$ est croissante, alors la suite $(u_n)$ est également croissante : tout ce que l'on peut dire, c'est que $(u_n)$ est monotone.

**c)** • La faute que l'on retrouve éternellement : la suite $(u_n)$ est croissante et majorée par 1 donc elle converge (ceci est correct) vers 1 (là, ça ne va plus !).
Voici un contre exemple parlant. On pose, pour tout entier naturel $n$ :

$$x_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$$

La suite $(x_n)$ est bien croissante car $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\geq 0$, elle est majorée par 1 (et même par $\frac{1}{2}$) mais elle ne converge pas vers 1 puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

• Le pire de tout est d'écrire que la suite $(u_n)$ est continue !!! Il faut réfléchir à ce qu'est une suite.

**2) a)** L'élévation au carré ne s'écrit pas $x$^2 en Pascal, mais sqr($x$) ou $x$ * $x$.
**b)** La variable "compteur" de la boucle doit parcourir les valeurs 1, 2, …, $n$ et non pas 0, 1, 2, …, $n$.

**3) c)** • Il est insensé de conclure $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}v_k^2=0$, puisque, d'une part, cette somme ne contient que des termes positifs et, d'autre part, son premier terme est $v_0=1$.

• La série de terme général $v_k^2$ n'est pas géométrique !!!

• À proscrire absolument ! La règle des signes qui chancelle sur ses fondations : $(-v_k^2)=-v_k^2$.

## Exercice 2..............................................................................

### ❖ Conseils de méthode

**1) b)** Pour trouver une famille génératrice de Ker$f$, on résout $AX=0$ avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Pour trouver une famille génératrice de Im$f$, se souvenir que :

$$\mathrm{Im}f=\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),f(e_3))$$

**c)** Même technique pour obtenir une famille génératrice de Im $f^2$.

**2) a)** On a un polynôme annulateur de $M$ donc aussi de $g$.

**b)** Si 0 n'était pas valeur propre, la matrice $M$ serait inversible… Ceci doit permettre de trouver une contradiction.

**c)** Si $M$ était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale. Mais quelle est donc cette matrice diagonale ?

**3) a)** Que connaît-on sur l'endomorphisme $g^2$ ?

**b)** Il suffit de montrer que la famille ( $u$, $g(u)$, $g^2(u)$ ) est libre puisqu'elle contient 3 vecteurs d'un espace de dimension 3.

**c)** Il faut exprimer $g(u)$, $g\big(g(u)\big)$ et $g\big(g^2(u)\big)$ comme des combinaisons linéaires de $u$, $g(u)$ et $g^2(u)$, ce qui donnera les colonnes de la matrice $N$ cherchée.

**d)** Se souvenir que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}\big(g(u), g\big(g(u)\big), g\big(g^2(u)\big)\big)$ : tout ceci se lisant sur les colonnes de la matrice $N$.
Ayant la dimension de $\operatorname{Im} g$, on en déduit (théorème du rang) celle de $\operatorname{Ker} g$, ce qui est un premier pas vers l'obtention d'une base de $\operatorname{Ker} g$.
Pour trouver $\operatorname{Im} g^2$ calculer la matrice $N^2$ et procéder comme pour $\operatorname{Im} g$.

## ❖ Conseils de rédaction

**1) b)** Signaler que le vecteur $a$ n'est pas nul avant d'affirmer que $(a)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.
Signaler que la famille $(b, c)$ est formée de deux vecteurs proportionnels suffit à prouver sa liberté et à en faire une base de $\operatorname{Im} f$. On pouvait aussi, comme dans le corrigé, écrire que c'est une famille génératrice de 2 vecteurs d'un espace de dimension 2 (grâce à la formule du rang).
Faire attention au fait que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ et pas de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ : par conséquent, les éléments de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des triplets de réels et pas des vecteurs colonnes à 3 lignes.

**2) c)** Lors du raisonnement par l'absurde, faire attention que $M = 0_3$ n'est, a priori, pas en contradiction avec l'énoncé, il faut pousser jusqu'à $M^2 = 0_3$.

**3) b)** Lorsqu'on applique $g$ aux deux membres de l'égalité $a\,u + b\,g(u) + c\,g^2(u) = 0$, il faut citer la linéarité de $g$ pour en déduire que : $a\,g(u) + b\,g^2(u) + c\,g^3(u) = 0$.

**d)** Pour la dimension de $\operatorname{Im} g$, signaler même rapidement que ( $g(u)$, $g^2(u)$ ) est libre.

## ❖ Aide à la résolution

**1) b)** Les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont données par les colonnes de la matrice $A$.

**c)** De même, les coordonnées de $f^2(e_1)$, $f^2(e_2)$ et $f^2(e_3)$ sont données par les colonnes de la matrice $A^2$.