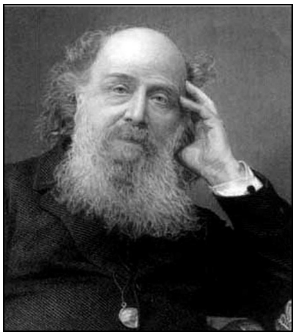
Chapitre 1

Matrices
Systèmes linéaires

James **Sylvester** s'intéresse à des tableaux de nombres qu'il nomme *matrices* en 1850. Peu après, Arthur **Cayley** définit des opérations sur les matrices. Curieusement, c'est au barreau de Londres que les deux mathématiciens anglais se rencontrent et sympathisent malgré des caractères très différents. Sylvester est irascible, coléreux alors que Cayley est d'une gentillesse extrême. Hommes de culture tous les deux, le premier compose des poèmes alors que le second écrit des romans. Leur collaboration a fait faire de remarquables progrès à l'algèbre linéaire.



James Sylvester
1814-1897

■■ Objectifs

■ Les incontournables

- ▷ Connaître les définitions des matrices particulières (matrices diagonales, triangulaires, symétriques...).
- ▷ Maîtriser les opérations matricielles, en particulier le produit.
- ▷ Connaître les propriétés des opérations matricielles.
- ▷ Connaître la définition d'une matrice inversible et les propriétés de l'inverse.
- ▷ Connaître la méthode du pivot de Gauss.

■ Et plus si affinités

- ▷ Savoir utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour inverser une matrice.
- ▷ Savoir travailler sur des matrices de taille n.

■■ Résumé de cours

■ Matrices

Définition 1.1. — Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$. On appelle matrice à n lignes et p colonnes le tableau de réels suivant : $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Si $p=n$, la matrice A est dite *carrée d'ordre n* et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Remarque 1.1. — On considère qu'un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est un nombre réel.

Notation 1.1 — La matrice A s'écrit : $A=(a_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ ou simplement, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le nombre de lignes et de colonnes, $A=(a_{i,j})$.

Définition 1.2. — Si tous les éléments de la matrice A sont nuls, on dit que A est la matrice nulle et on note $A=0$.

On appelle *matrices lignes* les éléments de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et *matrices colonnes* ceux de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Définition 1.3. — Deux matrices sont égales si elles ont même nombre de lignes, même nombre de colonnes et si elles ont les mêmes coefficients.

■ Opérations matricielles

❑ Addition de deux matrices

Définition 1.4. — Soit deux matrices $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle somme de A et de B la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée $A+B$, définie par $A+B=(c_{i,j})$ où : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$.

❑ Produit d'une matrice par un réel

Définition 1.5. — Soit une matrice $A = \left(a_{i,j}\right)$ de $\mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{R}\right)$ et λ un réel.

On appelle produit de A par le réel λ, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{R}\right)$ notée λA définie par $\lambda A = \left(a'_{i,j}\right)$ où : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ a'_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.

Exemple 1.1. — Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$, on a : $2A - 3B = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -22 \\ 1 & 4 & 27 \end{pmatrix}$.

❑ Produit de deux matrices

Définition 1.6. — Soit $(n,p,q) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^3$, $A = \left(a_{i,j}\right)$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{R}\right)$ et $B = \left(b_{i,j}\right)$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}\left(\mathbb{R}\right)$. On appelle produit de A par B la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}\left(\mathbb{R}\right)$ notée AB définie par $AB = \left(c_{i,j}\right)_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le q}$ où : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, b_{k,j}$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment multiplier deux matrices ?**

Remarque 1.2. — Il est exceptionnel que, si A et B sont deux matrices, on ait $AB = BA$. Lorsque cependant c'est le cas, on dit que les matrices A et B commutent.

Remarque 1.3. — Le produit de 2 matrices peut être nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle : par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

❑ Propriétés des opérations matricielles

Propriétés 1.1. — Pour toutes matrices *A, B, C* telles que les opérations ci-dessous soient possibles, on a :

- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B+C) = AB + AC$ et $(A+B)C = AC + BC$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda AB$.

❑ Transposée d'une matrice

Définition 1.7. — Soit une matrice $A = \left(a_{i,j}\right)$ de $\mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{R}\right)$.

On appelle *transposée* de A la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}\left(\mathbb{R}\right)$ noté ${}^tA$ définie par ${}^tA = \left(a'_{i,j}\right)$ où :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\ a'_{i,j} = a_{j,i}.$$

Exemple 1.2. — Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

Remarque 1.4. — Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, ${}^tXY$ est le réel égal à $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

> **Propriétés 1.2.** — Pour toutes matrices A et B telles que $A+B$ existe et pour tout réel λ, on a :
> - ${}^t\left({}^tA\right) = A$.
> - ${}^t\left(A+B\right) = {}^tA + {}^tB$.
> - ${}^t\left(\lambda A\right) = \lambda\,{}^tA$.

■ Matrices carrées

❑ Définitions

Définitions 1.8. — Soit $A = \left(a_{i,j}\right)$ une matrice de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$.

- Pour tout i élément de $[\![1,n]\!]$, les réels $a_{i,i}$ sont appelés coefficients diagonaux.
- A est une matrice *triangulaire inférieure* si pour tout $\left(i,j\right)$ de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i < j$, $a_{i,j} = 0$.
- A est une matrice *triangulaire supérieure* si pour tout $\left(i,j\right)$ de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i > j$, $a_{i,j} = 0$.
- A est une matrice *diagonale* si pour tout $\left(i,j\right)$ de $[\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$.

Définition 1.9. — La *matrice identité* (ou matrice unité) de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ est la matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1. Elle est notée I_n ou tout simplement I.

Remarque 1.5. — Une matrice est dite *scalaire* si elle est de la forme αI, où α est un réel.

> **Propriété 1.3.** — $\forall A \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, $AI = IA = A$ et $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}\left(\mathbb{R}\right)$, $IX = X$.

❑ Puissance d'une matrice carrée

Définition 1.10. — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$.

Par convention, on pose $A^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel p non nul, on pose $A^p = A^{p-1}A$.

En fait, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, A^p est le produit de p matrices toutes égales à A.

⇨ **Méthode 1.2. Comment calculer une puissance d'une matrice par conjecture ?**

❑ Formule du binôme

> **Théorème 1.1.** — Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ qui commutent ($AB = BA$), alors pour tout entier naturel p, on a : $\left(A+B\right)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k$.

⇨ **Méthode 1.3. Comment utiliser la formule du binôme ?**

❑ Matrices carrées inversibles

Définition 1.11. — On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *inversible* s'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I$. La matrice B est *l'inverse* de A et on note $B = A^{-1}$.

Théorème 1.2. — Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = I$, alors A et B sont inversibles et on a : $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

⇨ **Méthode 1.4. Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée par produit ?**

Exemple 1.3. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. $AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Comme $AB = I$, alors A et B sont inversibles et on a : $B = A^{-1}$ (ou si l'on veut $A = B^{-1}$).

Propriétés 1.4. — Si A est inversible, alors :

- A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Pour tout entier naturel p, A^p est inversible et $\left(A^p\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p$, matrice que l'on note A^{-p}.
- Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et on a : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

❑ Inversibilité des matrices carrées d'ordre 2

Propriété 1.5. — La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, on a : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

❑ Propriétés des matrices diagonales

Propriété 1.6. — Le produit de deux matrices diagonales est la matrice diagonale obtenue en multipliant entre eux les termes diagonaux de même place.
Par exemple, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $D' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}$, alors $DD' = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ 0 & bb' \end{pmatrix}$.

Propriété 1.7. — La puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice diagonale est la matrice diagonale obtenue en élevant les termes diagonaux à la puissance n.
Par exemple, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, alors $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

Propriété 1.8. — Une matrice diagonale D est inversible lorsque tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. D^{-1} est alors obtenue en inversant les coefficients diagonaux de D.

Par exemple, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}$

■ Systèmes linéaires

❑ Écriture matricielle d'un système

Définition 1.12. — Soit le système linéaire $(\mathrm{S}) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée matrice associée au système (S).

Notation 1.2 — Avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $(\mathrm{S}) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}$ s'écrit $AX = Y$.

❑ Interprétation matricielle des systèmes de Cramer

Propriété 1.9. — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice A est inversible si et seulement si A est la matrice d'un système de Cramer, c'est-à-dire si le système $AX = Y$, d'inconnue X élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, possède une seule solution, cette solution étant $X = A^{-1}Y$.

⇨ **Méthode 1.5. Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée par résolution de système ?**

Propriété 1.10. — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a l'équivalence suivante :
A est inversible si et seulement si, pour toute matrice X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

Théorème 1.3. — Soit A une matrice **triangulaire**.
A est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux de A sont tous non nuls.

❑ Réduite de Gauss

Définition 1.13. — Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle réduite de Gauss de A, toute matrice triangulaire obtenue par des opérations élémentaires effectuées sur les lignes de A.

Remarque 1.6. — Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice sont les mêmes que celles décrites sur les systèmes.

Théorème 1.4. — Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si une réduite de Gauss de A est inversible, alors A est inversible.
- Si A est inversible, alors toutes ses réduites de Gauss sont inversibles.

⇨ **Méthode 1.6. Comment montrer qu'une matrice est (ou n'est pas) inversible ?**

❑ Méthode de Gauss-Jordan

Théorème 1.5. — Toute matrice inversible peut se transformer en la matrice identité à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice et son inverse s'obtient en effectuant, dans le même ordre, les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de la matrice identité.

⇨ **Méthode 1.7. Comment calculer l'inverse d'une matrice carrée par la méthode de Gauss-Jordan ?**