■■ Méthodes

■ Comparaison d'expressions

❑ Méthode 1.1. Comment établir que $f(x) \leq f(y)$?

Si une fonction *f* est monotone sur un ensemble *I*, et si *x* et *y* appartiennent à *I*, alors comparer *x* et *y* suffit pour comparer $f(x)$ et $f(y)$.
Plus précisément :
• Si *f* est croissante sur *I*, alors : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
• Si *f* est décroissante sur *I*, alors : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
Remarque : si l'on veut établir des équivalences au lieu d'implications, il faut signaler en plus la bijectivité de *f* (ce qui établit l'implication réciproque grâce aux variations de f^{-1} qui sont les mêmes que celles de *f*).

⇨ Exercice 1.4

Exemple. Montrer que quel que soit l'entier *n* supérieur ou égal à 2, on a :

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} \quad \text{(nous noterons cette inégalité } (I)\text{)}$$

Remarque importante de présentation — Nous allons commencer par une analyse qui se fait au brouillon, ou même, avec un peu d'habitude, mentalement. Nous proposerons une rédaction "au propre" dans un second temps.

Au brouillon :

• Compte tenu des règles sur les exposants, (I) s'écrit : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right]^n$.

• Puisque la fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et puisque les deux membres de l'inégalité sont positifs (car $n \geq 2$), alors cette dernière inégalité équivaut à la suivante :

$$1-\frac{2}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^2.$$

• Mais, en développant le membre de droite, nous nous rendons compte que cette inégalité est évidente. En effet, elle s'écrit : $1-\frac{2}{n} \leq 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$, c'est-à-dire : $0 \leq \frac{1}{n^2}$, ce qui est vrai.

Méthodes

Sur la copie :
Il suffit de "partir" de la fin du raisonnement au brouillon :

$(1-\frac{1}{n})^2 = 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} \geq 1-\frac{2}{n}$ (car $\frac{1}{n^2} \geq 0$) donc : $1-\frac{2}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^2$.

La fonction $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et chaque membre est positif (car $n \geq 2$)

donc : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right]^n$.

Cette inégalité s'écrit bien : $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}$.

❑ Méthode 1.2. Comment établir une inégalité quelconque ?

Si l'inégalité que l'on se propose de prouver ne peut pas se mettre sous la forme étudiée à la **méthode 1.1,** alors en "passant tout" dans un même membre, on se ramène à prouver qu'une expression est positive (ou négative, selon les cas). Il sera par exemple possible, mais non obligatoire (voir ci-dessous), d'étudier les variations de la fonction définie par cette expression.

⇨ **Exercice 1.4**

Exemple. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq 2\sqrt{x}-1$.

Pour tout réel x positif, on a la chance de constater que : $x-2\sqrt{x}+1 = \left(\sqrt{x}-1\right)^2$.

Comme un carré est positif, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x-2\sqrt{x}+1 \geq 0$.

On a bien montré que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \geq 2\sqrt{x}-1$.

■ Preuve d'une proposition

❑ Méthode 1.3. Comment montrer une proposition par implication ?

C'est ce que l'on fait la plupart du temps : on procède par implication (sans se sentir obligé d'utiliser le symbole $\Rightarrow$) en construisant un raisonnement "direct".

⇨ **Exercice 1.5**

Exemple. Montrer que, si $x < 1$, alors $|x-4| > 3$.

Si $x < 1$, alors $x-4 < -3$. Par décroissance de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}_-$, on en déduit que : $|x-4| > |-3|$. Ceci veut bien dire que : $|x-4| > 3$.

Avec des notations plus symboliques, on vient de montrer que : $(x < 1) \Rightarrow (\,|x-4| > 3\,)$.

❑ Méthode 1.4. Comment montrer une proposition par l'absurde ?

> Pour montrer qu'une implication est vraie, il suffit de supposer l'hypothèse vraie et la conclusion fausse, puis d'en déduire alors une contradiction.

⇨ **Exercice 1.7**

Exemple. Montrer que, si un entier naturel n est tel que n^2 est pair, alors n est pair.
L'hypothèse de l'exercice est "n^2 est pair" et on va supposer que n est impair. Dès lors, il existe un entier naturel k tel que $n = 2k+1$. On a alors :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1\,.$$

En posant $p = 2k^2 + 2k$, p est bien un entier naturel et on a $n^2 = 2p + 1$. Ceci prouve que n^2 est impair, ce qui contredit l'hypothèse de l'exercice. En conclusion, n est pair.

❑ Méthode 1.5. Comment montrer une équivalence par double implication ?

> L'équivalence $(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q})$ signifie la double implication : $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$.

⇨ **Exercice 1.6**

Remarque — On privilégiera cette méthode lorsque les arguments permettant d'établir l'une des deux implications sont différents de ceux permettant d'établir l'autre.

Exemple. Soit deux réels a et b. Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ \ a2^n + b3^n = 0\right) \Leftrightarrow \left(a = b = 0\right)$.

Commençons par noter que, si $a = b = 0$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, on a bien $a\,2^n + b\,3^n = 0$.

Établissons l'autre implication :

Si, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$a2^n + b3^n = 0$, alors $\begin{cases} a2^0 + b3^0 = 0 \\ a2^1 + b3^1 = 0 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{l}\text{si l'égalité est vraie pour tout } n \text{ alors elle} \\ \text{l'est en particulier pour } n = 0 \text{ et } n = 1\end{array}\right)$.

Ce système s'écrit $\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases}$ et on en déduit : $\begin{cases} b = -a \\ 2a - 3a = 0 \end{cases}$.

On a bien montré que : $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

Ceci prouve la seconde implication, et finalement l'équivalence.

Remarque — Le fait de choisir deux valeurs de n pour trouver a et b n'est pas une hérésie puisque a et b sont des constantes (indépendantes de n). Si a et b étaient des fonctions de n, tout ceci serait inacceptable.

■ Récurrences

❑ Méthode 1.6. Comment montrer une proposition par récurrence sur l'entier naturel *n* ?

> n_0 est ici un entier naturel.
> On veut montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n à partir de n_0.
> - Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
> - Hérédité : on considère un entier n fixé supérieur ou égal à n_0 tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. En utilisant $\mathcal{P}(n)$, on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
> - Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est alors vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0.

⇨ **Exercices 1.8, 1.9, 1.10, 1.12**

Exemple. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{u_n} \end{cases}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.

On commence par noter, pour n entier naturel, $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 1$".

• Initialisation : $\mathcal{P}(0)$ est vraie par choix de u_0.

• Hérédité : on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie (c'est-à-dire $u_n = 1$) pour un entier naturel n fixé.

On a alors $u_{n+1} = \dfrac{3\times 1 - 2}{1} = 3 - 2 = 1$.

Ceci montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• En conclusion, on a bien montré, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.

❑ Méthode 1.7. Comment montrer une proposition par récurrence d'ordre 2 sur l'entier naturel *n* ?

> On veut montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n à partir de n_0.
> - Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies.
> - Hérédité : on considère un entier n fixé, supérieur ou égal à n_0, tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Grâce à $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$, on montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
> - Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

⇨ **Exercice 1.11**

Remarque. On généralise sans problème au cas d'une récurrence d'ordre 3 ou plus.

Exemple. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

On commence par noter, pour n appartenant à $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 3^n - 2^{n+1}$".

• Initialisation :

$3^0 - 2^1 = 1 - 2 = -1 = u_0$ et $3^1 - 2^2 = 3 - 4 = -1 = u_1$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

• Hérédité :

On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies pour un entier n naturel fixé et on va montrer que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie (c'est-à-dire que l'on a : $u_{n+2} = 3^{n+2} - 2^{n+3}$).

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5(3^{n+1} - 2^{n+2}) - 6(3^n - 2^{n+1})$, car $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vraies .

Comme $3^{n+1} = 3 \times 3^n$ et $2^{n+2} = 2 \times 2^{n+1}$, on a :

$u_{n+2} = (5\times 3 - 6).3^n + (-5\times 2 + 6).2^{n+1} = 9\times 3^n - 4\times 2^{n+1} = 3^{n+2} - 2^{n+3}$.

Ceci montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

Méthodes

Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists n \in \mathbb{N},\ x \leq n \leq y$.	☐	☐
2.	$\exists! y \in \mathbb{R},\ \exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 = y$.	☐	☐
3.	La fonction *f* n'est pas la fonction nulle signifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.	☐	☐
4.	Une suite est soit croissante, soit décroissante.	☐	☐
5.	Si *f*, définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas paire, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(-x)$.	☐	☐
6.	On désigne par *a* et *b* deux réels, alors : $(ab \neq 0) \Leftrightarrow (a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0)$.	☐	☐
7.	Il est suffisant qu'une fonction soit dérivable sur un intervalle *I* de $\mathbb{R}$ pour qu'elle soit continue sur *I*.	☐	☐
8.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite $(\lvert u_n \rvert)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.	☐	☐
9.	On peut prouver par récurrence sur *n* la proposition : " $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ".	☐	☐
10.	Si $\mathcal{P}(n)$ est " $u_{2n+1} \leq 2^n$ ", alors $\mathcal{P}(n+1)$ est " $u_{2n+2} \leq 2^{n+1}$ ".	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

❑ **Exercice 1.1.** — On considère le polynôme P défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{11}{24}x^2 + \frac{7}{12}x + 1.$$

Calculer $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ et $P(4)$. Peut-on en déduire quelque chose pour $P(5)$?

❑ **Exercice 1.2.** — Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1+e^{-x}}{1+e^{x}}$.
Montrer que f n'est ni paire, ni impaire.

❑ **Exercice 1.3.** — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

❑ **Exercice 1.4.** * — Une inégalité concernant la fonction exponentielle.
1. Montrer l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x+1$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \left[0, \sqrt{n}\right],\ e^{t^2}\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq 1$.

D'après EML

❑ **Exercice 1.5.** — Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$.
1. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - f'(x) - \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
2. En déduire une fonction g telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f(x)$.

D'après EDHEC

❑ **Exercice 1.6.** ** — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda^n + \mu^n, \text{ où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont deux réels tels que } 0 < \lambda \leq \mu.$$

Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq \mu < 1$ (on pourra mettre μ^n en facteur).

❑ **Exercice 1.7.** * — Le but de cet exercice est de montrer que $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ (où l'on désigne par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions d'entiers).

Supposons pour cela qu'il existe deux entiers n et p (avec $p \geq 1$) tels que $\sqrt{2} = \dfrac{n}{p}$. On les suppose de plus choisis de telle sorte que la fraction soit irréductible (non simplifiable).

1. Justifier que n est pair.

2. En écrivant n sous la forme $2n'$, avec n' élément de $\mathbb{N}$, montrer que p lui-même est pair.

3. Conclure.

❑ **Exercice 1.8.** — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 3$.

❑ **Exercice 1.9.** — Soit un réel a positif. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geq 1 + na$.

❑ **Exercice 1.10.** — Montrer que la proposition $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n^2\right)$ est fausse.

Prouver en revanche que : $\forall n \geq 4,\ 2^n \geq n^2$.

❑ **Exercice 1.11.** — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit : $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 2^n$.

❑ **Exercice 1.12.** * — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \dfrac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$.

❑ **Exercice 1.13.** ** — Le but de cet exercice est de déterminer, si elles existent, toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, et vérifiant la condition suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

1. Considérons f une telle fonction.

a) En donnant à x et y des valeurs particulières, donner les seules valeurs possibles de $f(0)$.

b) En donnant à x et y d'autres valeurs particulières, justifier que $f(0)$ vaut nécessairement 1.

c) En donnant à y seulement une certaine valeur, donner l'expression de $f(x)$ pour tout réel x.

2. Conclure quant au but de l'exercice.