

# Table des matières

---

Méthodes mathématiques, 1

---

<b>1</b>	<b>Théorème spectral pour les opérateurs normaux bornés</b>	<b>3</b>
1.1	Ce qu'il faut savoir sur les mesures complexes . . . . .	3
1.1.1	Définitions, exemples . . . . .	3
1.1.2	Le théorème de Radon-Nikodym . . . . .	4
1.1.3	Quelques conséquences de Radon-Nikodym . . . . .	7
1.2	Le théorème spectral . . . . .	13
1.2.1	Exemple motivant . . . . .	13
1.2.2	Deux versions du théorème spectral . . . . .	14
1.3	Conséquences du théorème spectral fort . . . . .	24
1.3.1	Premières conséquences . . . . .	24
1.3.2	Spectre d'un opérateur normal, caractérisation des opérateurs normaux compacts . . . . .	30
1.3.3	Propriétés des opérateurs positifs . . . . .	33
1.3.4	Exemples d'opérateurs compacts : les opérateurs à trace et les opérateurs de Hilbert-Schmidt . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Théorème spectral pour des opérateurs non bornés</b>	<b>49</b>
2.1	Opérateurs non bornés et adjoints d'opérateurs . . . . .	49
2.2	Nombreux exemples liées à la mécanique quantique . . . . .	59
2.2.1	L'opérateur position . . . . .	59
2.2.2	L'opérateur énergie potentielle . . . . .	60
2.2.3	L'opérateur impulsion . . . . .	61
2.2.4	L'opérateur de quantification . . . . .	65
2.2.5	Dérivations, transformées de Fourier et distributions : le lien . . . . .	68
2.2.6	L'opérateur de Schrödinger . . . . .	73
2.3	Où l'on reconsidère le théorème RSFB . . . . .	77

2.4	Théorème spectral pour un opérateur normal non nécessairement borné . . . . .	83
2.4.1	Le théorème spectral . . . . .	83
2.4.2	Conséquences directes . . . . .	88
2.5	Représentation des semi-groupes continus d'opérateurs normaux	90
2.6	Démonstration du théorème 2.5.2 . . . . .	93
<hr/>		
<b>Fondements de la mécanique quantique,</b>		<b>97</b>
<hr/>		
<b>3</b>	<b>Principes de la mécanique quantique</b>	<b>99</b>
3.1	Principes statiques et premières conséquences . . . . .	99
3.2	Quantification de la position et de l'impulsion . . . . .	104
3.2.1	Quantification de la position . . . . .	104
3.2.2	Quantification de l'impulsion . . . . .	106
3.3	Principe dynamique. L'équation de Schrödinger . . . . .	107
3.3.1	Quantification de Weyl polynomiale . . . . .	109
3.3.2	L'équation de Schrödinger . . . . .	112
3.3.3	Principe de résolution et exemples . . . . .	114
<b>4</b>	<b>Relations d'incertitude, quantification, symétries</b>	<b>117</b>
4.1	Relations d'incertitude . . . . .	117
4.1.1	Définition de l'incertitude . . . . .	117
4.1.2	Relations d'incertitude . . . . .	119
4.2	Quantification dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ . . . . .	121
4.3	Symétries . . . . .	128
4.3.1	Le théorème de Wigner . . . . .	128
4.3.2	Invariance des lois de la mécanique quantique par les transformées de Galilée . . . . .	129
4.3.3	Invariance des lois de la mécanique quantique par les translations temporelles . . . . .	131
<b>Appendice</b>		<b>133</b>
A	Topologies faibles et théorème d'Alaoglu-Banach . . . . .	133
A.1	Un résultat de topologie générale . . . . .	133
A.2	$\mathcal{F}$ -topologie et topologie faible sur un espace vectoriel topologique . . . . .	133
A.3	Théorème d'Alaoglu-Banach et conséquence . . . . .	136

B	Le théorème de Gelfand-Naïmark . . . . .	137
B.1	Algèbre de Banach, définitions fondamentales . . . . .	137
B.2	Le théorème de Gelfand-Naïmark . . . . .	141
C	Dérivée et primitive au sens des distributions . . . . .	145
D	Transformée de Fourier . . . . .	149
D.1	Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	150
D.2	Transformée de Fourier des fonctions à décroissance rapide . . . . .	151
D.3	La transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	159
E	L'intégrale de Bochner . . . . .	165
E.1	Construction standard de l'intégrale de Bochner . . . . .	165
E.2	Variante de la construction de l'intégrale de Bochner . . . . .	169
	<b>Notations</b>	<b>173</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>175</b>
	<b>Index</b>	<b>177</b>