

SAVOIRS

Thème 1 - Électronique : conversion analogique-numérique

[S1.1] Outils de représentation des signaux

La conversion analogique-numérique (ou CAN) fait passer d'un signal modélisé par une fonction continue du temps, à un flux discret de codes binaires. La conversion inverse s'appelle la conversion numérique-analogique (ou CNA).

1. Généralités

Pour étudier les propriétés d'un signal, on utilise deux représentations :

- l'une dans l'espace des temps, fournie par la fonction $g(t)$,
- l'autre dans l'espace des fréquences, fournie par la fonction $G(f)$ appelée spectre.

Le passage de l'une à l'autre se fait *via* la décomposition en série discrète de Fourier pour un signal $g(t)$ périodique, ou par la transformée de Fourier dans le cas général d'un signal $g(t)$ non périodique.

2. Le spectre fourni par la décomposition en série de Fourier

Si $g(t)$ est une fonction T-périodique, alors $g(t)$ s'écrit sous l'une des décompositions en série de Fourier suivantes :

- la série écrite en cosinus et sinus, à coefficients réels et à fréquences positives :

$$g(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right] \text{ où } (a_n, b_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} ;$$

- la série en exponentielles complexes, à coefficients complexes et à fréquences positives et négatives :

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp \frac{j2\pi n t}{T} \text{ où } c_n \in \mathbb{C}.$$

Si $g(t)$ est une fonction réelle, alors $c_{(-n)} = c_n^*$. L'histogramme des modules $|c_n|$ en fonction de la fréquence est le spectre en amplitudes de $g(t)$. Celui des phases $\arg(c_n)$ en fonction de la fréquence est son spectre en phases. Les fréquences $f_n = n/T$ contenues dans $g(t)$ sont proportionnelles à la fréquence fondamentale $f = 1/T$. À $n > 1$, on parle de fréquence harmonique de rang n .

3. Le spectre fourni par la transformée de Fourier

La transformée de Fourier (TF) généralise la série de Fourier aux signaux non périodiques. La TF de $g(t)$ est une fonction $G(f)$ qui le représente spectralement et lui est liée par les relations réciproques suivantes :

$$G(f) = [\text{TF}(g)](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\pi ft) g(t) dt$$
$$g(t) = [\text{TF}^{-1}(G)](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi ft) G(f) df$$

Signal $g(t)$	Transformée de Fourier $G(f)$
$\exp(-\alpha t^2)$ ($\alpha > 0$)	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}\right)$
$\delta(t)$	1
$\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$
1	$\delta(f)$
$\exp(j2\pi f_o t)$	$\delta(f - f_o)$
$\cos(2\pi f_o t)$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_o) + \frac{1}{2}\delta(f + f_o)$
$\sin(2\pi f_o t)$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_o) - \frac{1}{2}\delta(f + f_o)$
$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$2T \text{sinc}(2\pi f T)$

Le tableau ci-dessus donne les principales T.F. La représentation du module $|G(f)|$ est le spectre en modules (ou en amplitudes) de $g(t)$. Celle de l'argument $\arg(G(f))$ est son spectre en phases. Si $g(t) \in \mathbb{R}$, alors : $G(-f) = G^*(f)$, soit : $|G(-f)| = |G(f)|$ et $\arg(G(-f)) = -\arg(G(f))$.

La figure 1 schématise le spectre en amplitudes d'une fonction réelle $g(t)$ de spectre à support compact.

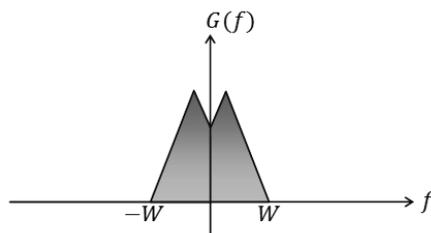


FIGURE 1

[S1.2] Échantillonnage idéal d'un signal

1. Définition et représentations de l'échantillonnage idéal

Échantillonner un signal $g(t)$, c'est prélever sur lui les échantillons $g(kT_e)$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $T_e \in \mathbb{R}_+^*$. Si la durée du prélèvement est nulle, l'échantillonnage est idéal.

Le signal échantillonné $g_s(t)$ est le produit de $g(t)$ par la distribution notée $\Pi_{T_e}(t)$, appelée peigne de Dirac de période T_e et définie comme une série infinie d'impulsions infiniment fines de hauteur unité.

Les figures 2, 3, 4 illustrent la construction du signal échantillonné à partir du signal continu $g(t)$ et du peigne de Dirac de période T_e .

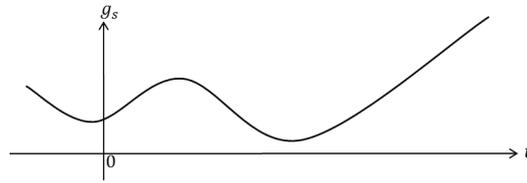


FIGURE 2

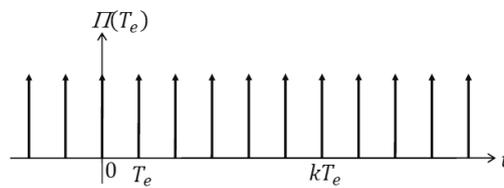


FIGURE 3

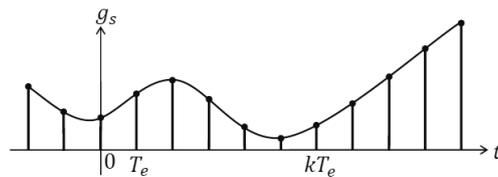


FIGURE 4

2. Échantillonnage idéal d'un signal de spectre continu

Soit $g(t)$ un signal à échantillonner idéalement à la fréquence $f_e = 1/T_e$ et soit $G(f)$ sa TF. Soit $g_s(t)$ le signal échantillonné et $G_s(f)$ sa TF.

On montre que :

$$G_s(f) = f_e \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(f - k f_e).$$

Ainsi, le spectre de $g_s(t)$ s'obtient-il par réplique du spectre de $g(t)$ autour de chacune des fréquences $f_k = k f_e$, où $k \in \mathbb{Z}$. Il est périodique de période f_e .

La figure 5 donne un tronçon (autour de l'origine) du spectre du signal idéalement échantillonné.

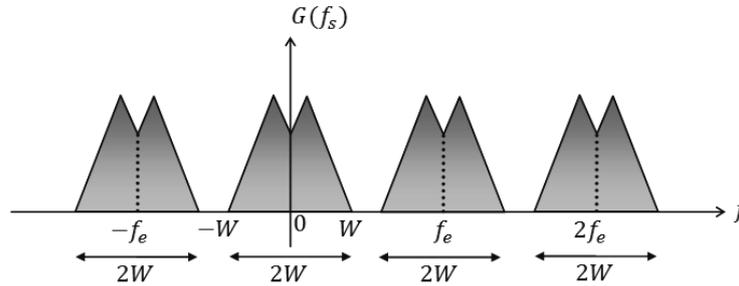


FIGURE 5 – Tronçon du spectre du signal idéalement échantillonné

3. Échantillonnage idéal d'un signal à spectre de raies

Supposons $g(t)$ défini comme somme finie d'exponentielles complexes, à fréquences positives et négatives :

$$g(t) = \sum_{n=1}^m \frac{G_{on}}{2} [\exp(j(\omega_n t + \Phi_n)) + \exp(-j(\omega_n t + \Phi_n))] \text{ avec } \omega_n = 2 \times \pi f_n.$$

Sachant que : $\Pi_{T_e}(t) = (1/T_e) \times \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(2j\pi k f_e t) \right]$,

on peut écrire :

$$\begin{aligned} g_S(t) &= g(t) \times \Pi_{T_e}(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^m \frac{G_{on}}{2T_e} [\exp(j2\pi(kf_e + f_n)t + \Phi_n) + \exp(j2\pi(kf_e - f_n)t - \Phi_n)]. \end{aligned}$$

Envisageons le cas où f_e se situe juste en dessous ou juste au-dessus de f_m , maximum des fréquences f_n , et limitons nous aux composantes spectrales de $g_S(t)$ de l'intervalle $[0; f_e]$.

Ainsi fenêtré, le spectre de $g_S(t)$ comporte les éventuelles raies du tableau suivant :

Fréquences	Amplitudes	Phases
f_n	$\frac{G_{on}}{2T_e}$	Φ_n
$f_e - f_n$	$\frac{G_{on}}{2T_e}$	$-\Phi_n$
$2f_e - f_n$	$\frac{G_{on}}{2T_e}$	$-\Phi_n$
$-f_e + f_n$	$\frac{G_{on}}{2T_e}$	Φ_n

[S1.3] Théorème de Shannon

Soit un signal $g(t)$ et soit $g_s(t)$ son signal échantillonné à la fréquence f_e . On suppose que le spectre de $g(t)$ est à support compact, c'est-à-dire que $G(f)$ prend des valeurs non nulles seulement sur l'intervalle $[-W; +W]$.

Claude Elwood Shannon a énoncé le théorème suivant : pour ne pas perdre d'information sur un signal $g(t)$, il faut que la fréquence d'échantillonnage soit au moins égale au double de la fréquence maximale contenue dans le signal :

$$f_e > 2W.$$

La restitution théorique du signal analogique $g(t)$ à partir du signal échantillonné $g_s(t)$, se fait à l'aide d'un filtre passe-bas idéal, dont la fonction de transfert $\Lambda_{f_c}(f)$ est une fonction-porte « en tout ou rien » de fréquence de coupure f_c :

$$\Lambda_{f_c}(f) = 1 \Leftrightarrow |f| < f_c \text{ et } \Lambda_{f_c}(f) = 0 \Leftrightarrow |f| > f_c \text{ avec } f_c \in [W; f_e - W].$$

[S1.4] Le repliement de spectre

Quand la condition de Shannon n'est pas remplie, $g(t)$ est sous-échantillonné. Il y a repliement du spectre (« aliasing » en anglais) de $g_s(t)$, ce qui se traduit par l'apparition dans ce spectre, de fréquences étrangères appelées alias, qui demeurent après le filtrage de restitution.

La figure 6 donne un tronçon (autour de l'origine) du spectre du signal échantillonné dans le cas d'un sous-échantillonnage.

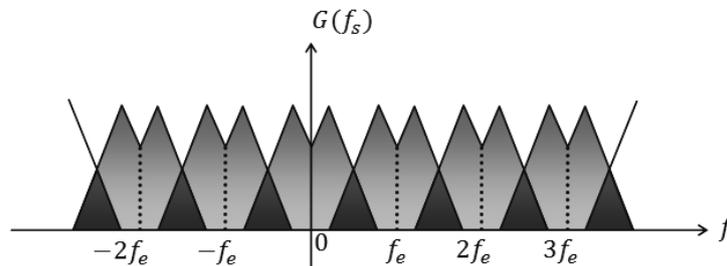


FIGURE 6 – Tronçon de spectre du signal échantillonné (cas de sous-échantillonnage)

Anti-coïncidence dans le cas d'un spectre de raies

Une raie de fréquence f_n peut se replier sur la fréquence $f_e - f_n$ et coïncider en fréquence avec une raie de fréquence f_p du spectre de base. Si la somme des phases Φ_n et Φ_p de ces raies vaut π modulo 2π et si leurs amplitudes sont égales, alors il s'agit d'une anti-coïncidence destructive qui les fait disparaître du spectre du signal échantillonné.

[S1.5] Le filtre passe-bas anti-repliement

De trop grandes fréquences d'échantillonnage saturer les mémoires des calculateurs numériques. On préfère limiter f_e et insérer avant l'échantillonneur, un filtre passe-bas analogique dit « anti-repliement », pour abaisser W en-dessous

de $2fe$. Après restitution du signal, on constate que le premier effet d'un filtre anti-repliement est de lisser le signal d'origine.

[S1.6] Échantillonnage réel d'un signal continu

L'échantillonneur-bloqueur prélève un échantillon $g(t_k = kT_e)$, puis en bloque la valeur pendant une durée τ . Lors de ce type d'échantillonnage, le signal $g(t)$ est multiplié par la distribution périodique Ω_{τ, T_e} , réalisant le train d'impulsions de période T_e et de largeur d'impulsions τ .

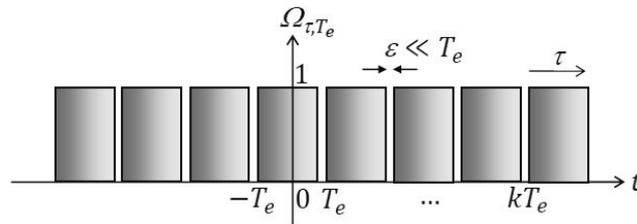


FIGURE 7 – Train d'impulsion

Si la largeur τ des impulsions tend vers T_e , le signal échantillonné $g'_s(t)$ est dit en *marches d'escalier*. La figure 7 représente Ω_{τ, T_e} et la figure 8 décrit le résultat de l'échantillonnage-blocage quand $\tau \rightarrow T_e$, c'est-à-dire le signal $g'_s(t)$ en marches d'escalier.

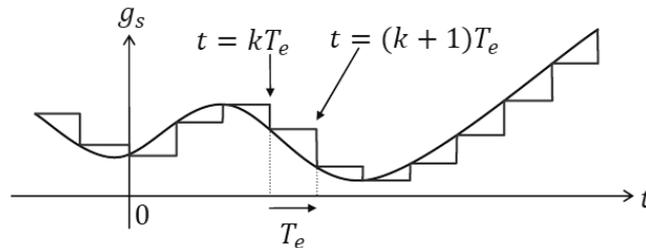


FIGURE 8 – Signal échantillonné-bloqué en marches d'escalier

Spectre d'un signal échantillonné-bloqué

Le spectre en module $|G'_s(f)|$ du signal échantillonné-bloqué s'obtient en répliquant d'abord périodiquement le spectre $|G(f)|$ du signal $g(t)$ puis en modulant le spectre ainsi obtenu par la fonction $|\text{sinc}(\pi \tau f)|$.

Plus τ s'allonge et tend vers T_e , plus l'effet de la modulation par $|\text{sinc}(\pi \tau f)|$ distord le motif central de $|G'_s(f)|$, notamment en diminuant son étalement vers les hautes fréquences. Lors de l'échantillonnage-blocage, on perd donc d'autant plus d'information sur le signal de départ $g(t)$ que la durée de blocage τ est plus longue.

Cependant, bien que le blocage de l'échantillon $g(kT_e)$ pendant une durée τ voisine de T_e distorde notablement le motif central du spectre $G'_s(f)$ et que le signal $g'_s(t)$ contienne moins d'information que le signal $g(t)$ de départ, il donne au module de quantification-codage le temps d'opérer la conversion en code binaire.

[S1.7] Quantification et codage

Un codage sur N bits définit une grille de $m = 2^N$ valeurs avec laquelle on convertit le signal $g'_S(t)$ en un flux de codes binaires sur N bits.

1. Le quantum de quantification

Soit g_{min} et g_{max} les valeurs extrémales du signal $g(t)$, alors le quantum de quantification δ vaut :

$$\delta = \frac{g_{max} - g_{min}}{m} = \frac{\text{plage des valeurs de } g}{2^N}.$$

2. La quantification par défaut

Pour une quantification classique dite « par défaut », on affecte à l'échantillon $g(kT_e)$ la valeur arrondie $g_q(kT_e)$ telle que :

$$\text{si } g_{min} + k\delta < g(kT_e) < g_{min} + (k+1)\delta \text{ alors } g_q(kT_e) = g_{min} + k\delta.$$

3. Le codage

Après la quantification, vient le codage de la valeur quantifiée $g_q(t = kT_e)$ en un mot binaire C_k codé sur N bits. Exemples de mots binaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_q = g_{min} \text{ donne le code } C_k = 0000 \\ g_q = g_{min} + \delta \text{ donne le code } C_k = 0001 \\ \dots \\ g_q = g_{min} + (m-1)\delta \text{ donne le code } C_k = 1110 \\ g_q = g_{min} + m\delta \text{ donne le code } C_k = 1111 \end{array} \right.$$

La figure 9 montre comment, à partir du signal $g_q(t)$, le module CAN fournit en temps discret, une série déroulante de codes sur 4 bits.

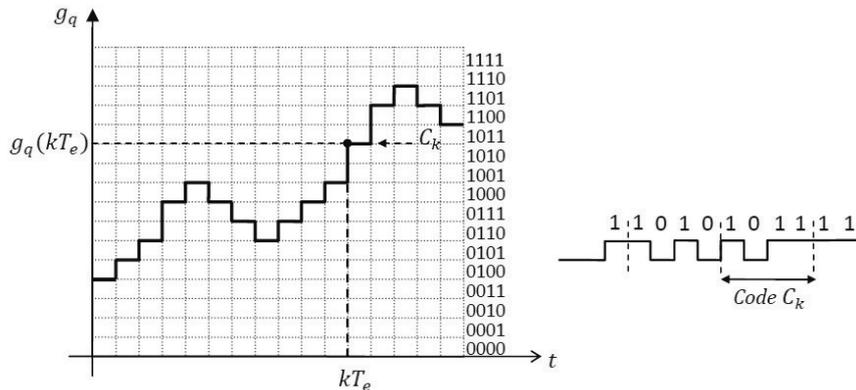


FIGURE 9 – Exemple de codage sur 4 bits

[S1.8] Le bruit de quantification

1. La définition de $\varepsilon(t)$

On définit la fonction $\varepsilon(t)$, appelée erreur ou bruit de quantification, par :

$$\varepsilon(t) = g(t) - g_q(t = kT_e),$$

qui prend des valeurs aléatoires dans l'intervalle $[0; \delta]$.