

Chapitre 1

Nombres complexes

1.1 Expressions d'un nombre complexe

1.1.1 Point de cours

Définitions et propriétés : il existe un ensemble noté \mathbb{C} , appelé **ensemble des nombres complexes**, qui possède les propriétés suivantes :

1. L'ensemble des nombres réels \mathbb{R} est inclus dans \mathbb{C} .
 2. L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul sont les mêmes.
 3. Il existe un nombre complexe, noté i , tel que $i^2 = -1$.
 4. Tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous $a + ib$ avec a et b réels.
- L'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels est la **forme algébrique** du nombre complexe z . a est la **partie réelle** de z , elle est notée $\Re(z)$. b est la **partie imaginaire** de z , elle est notée $\Im(z)$.
 - Le nombre complexe $a - ib$ est appelé **conjugué de z** et noté \bar{z} .
 - L'écriture : $z = r \cos \theta + ir \sin \theta$ est appelée **forme trigonométrique** de z , où $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ désigne le **module** du nombre complexe z et θ désigne un **argument** de z : $\arg(z) = \theta[2\pi]$.
 - L'écriture : $z = re^{i\theta}$ est appelée **forme exponentielle** de z .

1.1.2 Exercices d'application du cours

EXERCICE 1

10 minutes

Écrire les expressions suivantes sous la forme algébrique :

1. $z = (2 + 5i) + (8 + 9i)$

5. $z = (-2 - 2i) - (3 + 4i)$

9. $z = 3(2 - 2i) - 2(3 + 4i)$

2. $z = (9 - 3i) + (3 + 6i)$

6. $z = (2 + 5i) - (8i - 9)$

10. $z = 9(2 + 5i) - 5(8 + 9i)$

3. $z = (2 + 5i) + (8i - 9)$

7. $z = (2 + 5i) + 3(8 + 9i)$

11. $z = (9 - 3i) - 3(3 + 6i)$

4. $z = (2 + 5i) - (8 + 9i)$

8. $z = 2(9 - 3i) + 5(3 + 6i)$

12. $z = -3(-2 - 2i) + (3 + 4i)$

EXERCICE 2**5 minutes**

Déterminer le conjugué de chaque nombre complexe :

- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| 1. $z = 1 + i$ | 5. $z = 2i(3 - 4i)$ |
| 2. $z = -3 + 2i$ | 6. $z = (2 - i)(1 + 2i)$ |
| 3. $z = \sqrt{3} - i$ | 7. $z = -1 - i\sqrt{2}$ |
| 4. $z = -3i$ | 8. $z = 2$ |

EXERCICE 3**15 minutes**

Ecrire les expressions suivantes sous leur forme algébrique :

- | | | |
|---------------------------------|--|--|
| 1. $z = \frac{2 + 5i}{8 + 9i}$ | 3. $z = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$ | 5. $z = \frac{1 + i}{1 - i}$ |
| 2. $z = \frac{-2 - 2i}{3 + 4i}$ | 4. $z = \frac{\sqrt{3} - i}{1 + i}$ | 6. $z = \frac{(2 + 5i)(8 - 9i)}{2i(3 - 2i)}$ |

EXERCICE 4**10 minutes**

- Calculer i^2, i^3, i^4 et i^5 .
- Calculer i^n en fonction de n .
- En déduire l'expression algébrique de $Z = 2i^{2016} - 3i^{2019}$

EXERCICE 5**10 minutes**

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

- | | | |
|------------------|-------------------|----------------------------------|
| 1. $z = 1 + i$ | 5. $z = \sqrt{5}$ | 9. $z = -3 - 6i$ |
| 2. $z = 1 - i$ | 6. $z = 7i$ | 10. $z = -i\sqrt{7}$ |
| 3. $z = -1 + 3i$ | 7. $z = 5i - 7$ | 11. $z = -9$ |
| 4. $z = 4 - 3i$ | 8. $z = 6 + 8i$ | 12. $z = -\sqrt{19} - i\sqrt{6}$ |

EXERCICE 6**10 minutes**

Démontrer les propriétés suivantes :

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $ -z = z $ | 3. $\left \frac{1}{z} \right = \frac{1}{ z }$ | 5. $\left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 }$ |
| 2. $ z_1 \times z_2 = z_1 \times z_2 $ | 4. $ \bar{z} = z $ | 6. $ z^n = z ^n$ |

EXERCICE 7**10 minutes**

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

- | | | |
|---------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|
| 1. $z = (1 + i)(2 - 3i)$ | 3. $z = (\sqrt{5} + i)^2$ | 5. $z = (6 + 8i)^2(8 - 6i)^3$ |
| 2. $z = \frac{-1 + 3i}{2 - 3i}$ | 4. $z = (5i - 7)(2 + 7i)(2 - i)$ | 6. $z = \frac{-3 - 6i}{1 + i}$ |

EXERCICE 8**10 minutes**

Déterminer un argument des nombres complexes suivants :

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 4. $z = \sqrt{5}$ | 7. $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 2. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 5. $z = 7i$ | 8. $z = -9$ |
| 3. $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 6. $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 9. $z = -2i$ |

EXERCICE 9**10 minutes**

Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$
2. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
3. $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
4. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
5. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$
6. $\arg(z^n) = n \arg(z)$

EXERCICE 10**10 minutes**

Déterminer un argument des nombres complexes suivants :

1. $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
2. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7$
3. $z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
4. $z = (\sqrt{5})^4$
5. $z = (7i)^2$
6. $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
7. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$
8. $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6$
9. $z = (-9)^7$
10. $z = (-2i)^9$

EXERCICE 11**15 minutes**

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $z = 1 + i\sqrt{3}$
2. $z = 2 - 2i$
3. $z = -\frac{1}{5} + i\frac{\sqrt{3}}{5}$
4. $z = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$
5. $z = \sqrt{2}$
6. $z = \frac{3i}{7}$
7. $z = -3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$
8. $z = \frac{5}{3} - i\frac{5\sqrt{3}}{3}$
9. $z = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$
10. $z = -\sqrt{5} + i\sqrt{5}$
11. $z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
12. $z = -2i$

EXERCICE 12**15 minutes**

Ecrire les expressions suivantes sous la forme trigonométrique, puis sous la forme exponentielle :

1. $z = -2$
2. $z = 1 + i$
3. $z = 2\sqrt{3} - 2i$
4. $z = -\frac{1}{3}(1 - i\sqrt{3})$
5. $z = -5i$
6. $z = i\sqrt{3}$
7. $z = \frac{\sqrt{2}}{5} + i\frac{\sqrt{2}}{5}$
8. $z = -4 + 4i$
9. $z = -5 - 5i$

EXERCICE 13**15 minutes**

Ecrire les expressions suivantes sous la forme trigonométrique :

1. $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$
2. $z = -i\sqrt{5}$
3. $z = \sqrt{2}$
4. $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$
5. $z = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
6. $z = -9$
7. $z = -2i$
8. $z = -3e^{i\frac{\pi}{6}}$
9. $z = -i\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

EXERCICE 14**10 minutes**

Ecrire les expressions suivantes sous la forme algébrique :

1. $z = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$
2. $z = 6 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right)$
3. $z = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$
4. $z = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
5. $z = \sqrt{5} \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right)$
6. $z = \frac{1}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$
7. $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
8. $z = \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

EXERCICE 15**10 minutes**

Ecrire les expressions suivantes sous la forme exponentielle :

1. $z = i(3 + i\sqrt{3})$
2. $z = -2(3 + i\sqrt{3})$
3. $z = \sqrt{2}i(3 - i\sqrt{3})$
4. $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \times 3ie^{i\frac{\pi}{5}}$
5. $z = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \right)$
6. $z = -i \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) \right)$
7. $z = -2ie^{-i\frac{\pi}{5}} \times 3e^{i\frac{5\pi}{7}} \times \sqrt{3}e^{-i\pi}$

1.1.3 Exercices d'approfondissement**EXERCICE 16****10 minutes**Soit le nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.Donner la valeur exacte de $(z)^{2016}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.**EXERCICE 17****10 minutes**A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admetpour écriture complexe : $z' = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z}}{6}$.

1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1$ et $z_C = 3i$.
Déterminer les affixes des points A', B', C' images respectives de A, B, C par f .
2. On pose $z = x + iy$ (avec x et y réels).
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y .

EXERCICE 18**10 minutes**On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A , z_B et z_C où : $z_A = 1 + 2i$, $z_B = \bar{z}_A$, et $z_C = 1 + \sqrt{3} + i$.Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et donner le résultat sous forme algébrique.**EXERCICE 19****10 minutes**On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 - i$ et $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$.

1. Déterminer le module et un argument de z_A .
2. Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.
3. Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$. En déduire la forme exponentielle de z_B .

EXERCICE 20**15 minutes**

On appelle f l'application qui à tout point, d'affixe $z \neq 0$, associe le point d'affixe z' définie par :

$$z' = z + i - \frac{1}{z}.$$

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = i$ et $b = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' par f d'affixes respectives a' et b' .

1. Calculer a' et b' .
2. Démontrer que $\frac{-b}{b' - b} = \frac{\sqrt{3}}{3}i$.
3. Soit θ un réel. Démontrer que si $z = e^{i\theta}$ alors $z' = (2 \sin \theta + 1)i$.

EXERCICE 21**15 minutes**

Soit les nombres complexes $z_1 = e^{ia}$ et $z_2 = e^{ib}$ (a et b réels).

1. Donner la forme trigonométrique des nombres complexes z_1 et z_2 .
2. En utilisant les résultats de la question précédente, calculer $z_1 z_2$.
3. Déterminer la forme exponentielle de $z_1 z_2$, puis en déduire sa forme trigonométrique.
4. En utilisant les questions précédentes, retrouver les formules d'addition de cosinus et sinus.

EXERCICE 22**15 minutes**

Soit le nombre complexe $z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$. On pose : $z_2 = \overline{z_1}$, où $\overline{z_1}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_1 , $z_3 = -z_1$, $z_4 = z_1 e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1 , z_2 et z_3 .
2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_2 et z_3 .
3. Montrer que $z_4 = 3e^{\frac{5i\pi}{6}}$.
4. En déduire le module et un argument du nombre complexe z_4 .
5. Quelle est la forme algébrique de z_4 ?

EXERCICE 23**15 minutes**

Soit les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Ecrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et arguments de z_1 , z_2 et Z .
3. En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
4. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2016} .

EXERCICE 24**15 minutes**

On considère les trois nombres complexes suivants :

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \quad ; \quad z_2 = 1 - i \quad ; \quad z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Ecrire z_2 sous forme exponentielle.
2. a. Ecrire z_3 sous forme exponentielle.

- b. En déduire que $z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. a. En remarquant que $z_1 = z_2 \times z_3$, donner l'écriture de z_1 sous forme algébrique.
- b. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 25**20 minutes**

On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A , z_B , et z_C définies par :

$z_A = 2 + 2i$, $z_B = -2 + 2i$, $z_C = -\sqrt{3} + i$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

- Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A , z_B et z_C .
- Calculer $|z_A - z_B|^2$ et $|z_A - z_C|^2$.
- On considère la transformation $f(z) = ze^{-i\frac{\pi}{3}}$.
 - Soit $z'_A = f(z_A)$. Calculer sous forme exponentielle l'affixe z'_A .
 - Préciser le module et un argument de z'_A .
 - Déterminer la forme algébrique de z'_A .
 - Déduire des questions **b** et **c** les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 26**20 minutes**

On considère les nombres complexes suivants : $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, et $z_B = 2 - 2i$.

On pose $z = \frac{z_A}{z_B}$.

- Ecrire z sous forme algébrique.
- Calculer le module et un argument de z_A et de z_B .
 - En déduire le module et un argument de z .
 - Ecrire z sous forme trigonométrique.
- Déduire des résultats obtenus aux questions précédentes les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et de $\sin \frac{7\pi}{12}$.

EXERCICE 27**20 minutes**

On considère les nombres complexes $z_A = 5 - 5i$ et z_B de module égal à $5\sqrt{2}$ et d'argument égal à $-\frac{7\pi}{12}$, d'images respectives A et B.

- Calculer le module et un argument de z_A .
- Montrer par le calcul que $z_B = z_A e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
- Exprimer $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ sous forme algébrique.
- Calculer z_B sous forme algébrique.
- En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 28**15 minutes**

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n$.

- Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
- Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.
- A partir de quel rang n_0 , $|z_{n_0}| < 0,1$?
- Etablir que, pour tout entier naturel n , $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$.
- On note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$. On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$. Exprimer ℓ_n , en fonction de n . Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

EXERCICE 29**20 minutes**

Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1+i, 3-i$ et 2 . A tout point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M' est appelé l'image de M .

- Calculer les affixes des points A' et B' , images respectives des points A et B . Que remarque-t-on?
- Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5 .
- Vérifier que pour tout nombre complexe z , on a : $z' + 4 = (z - 2)^2$.
- En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ et, lorsque z est différent de 2 , une relation entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.
- Soient E le point d'affixe $2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe -4 et E' l'image de E .
 - Calculer $z_E - z_I$, donner la forme exponentielle, puis la forme algébrique.
 - Calculer $z_{E'} - z_J$, donner la forme algébrique puis la forme exponentielle.

EXERCICE 30**20 minutes****Partie A.** Restitution organisée de connaissances

Prérequis : on rappelle les deux résultats suivants :

i. si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \iff \begin{cases} z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ r > 0 \end{cases}$$

ii. pour tous nombres réels a et b :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Partie B.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, alors z^4 est un nombre réel.
2. Si $z + \bar{z} = 0$, alors $z = 0$.
3. Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.
4. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

1.2 Equations du second degré**1.2.1 Point de cours****Propriété**

Soit P le polynôme défini par $P(z) = az^2 + bz + c$, où a, b etc sont des nombres réels et $a \neq 0$, (E) l'équation $P(z) = 0$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Signe de Δ	Racines de P	Factorisation de P
$\Delta > 0$	$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ racines réelles distinctes	$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$
$\Delta = 0$	$z_0 = \frac{-b}{2a}$ racine double	$P(z) = a(z - z_0)^2$
$\Delta < 0$	$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{ \Delta }}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{ \Delta }}{2a}$ racines complexes conjuguées	$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$

1.2.2 Exercices d'application du cours**EXERCICE 31****10 minutes**

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes (on donnera les solutions sous forme algébrique) :

1. $z + 2 - 3i = 0$.
2. $3z + 8i - 2 = 0$.
3. $3iz + \bar{z} = 2 + i$.
4. $2 - 3i - 2z = 0$.
5. $2iz + 2 = 0$.
6. $iz + 2 - 3i = 0$.
7. $3iz + 4 = 4z - 2i$.
8. $z + 2\bar{z} = 0$.
9. $2z - i\bar{z} = 3$.