Chapitre 1

Rappel d'algèbre linéaire

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement le corps des nombres réels et le corps des nombres complexes. S'il n'y a pas lieu de les distinguer, on parlera du corps K des scalaires. L'ensemble E muni de deux lois, l'addition et la multiplication par un scalaire désignera un espace vectoriel sur K (ou K-espace vectoriel).

1.1 Espace vectoriel

Définitions générales

Définition 1.1 (Espace vectoriel) *Un espace vectoriel sur le corps K est un ensemble E muni des deux lois suivantes :*

- *une addition qui donne à E une structure de groupe commutatif*
- *un produit «externe» d'un élément de E par un élément de K qui possède les propriétés suivantes :*
  - $\forall \lambda,\mu \in K$, $\forall \vec{x} \in E$: $(\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$
  - $\forall \lambda,\mu \in K$, $\forall \vec{x} \in E$: $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$
  - $\forall \lambda \in K$, $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$
  - $\forall \vec{x} \in E$: $1\vec{x} = \vec{x}$ *(où 1 est l'élément unité de K)*

Les éléments de E seront appelés vecteurs.

Définition 1.2 (Sous-espace vectoriel) *Soit F un sous ensemble de l'espace vectoriel E. On dit que F est un sous espace vectoriel (s.e.v. en abrégé) de E s'il reste stable pour les opérations sur E, c'est-à- dire si :*

- $\forall \vec{x},\vec{y} \in F$, $\vec{x} + \vec{y} \in F$
- $\forall \lambda \in K$, $\forall \vec{x} \in F$, $\lambda\vec{x} \in F$

Définition 1.3 *Soit E un K-espace vectoriel, F et G deux sous espaces vectoriels de E.*

1. *On appelle somme de F et G et on note $F + G$ l'ensemble*

$$F + G = \{\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}, \vec{y} \in F, \vec{z} \in G\}$$

   C'est un sous espace vectoriel.

2. *F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{\vec{0}\}$. On note alors la somme $F \oplus G$.*
3. *Si de plus, on a $E = F \oplus G$, on dit que F et G sont des sous espaces supplémentaires.*

Théorème 1.1 *Si F et G sont supplémentaires, alors pour tout élément $\vec{x}$ de E, il existe un unique couple $(\vec{y},\vec{z})$ de $F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.*

Familles libres, génératrices, bases

Définition 1.4 *Soit $B = \{\vec{x}_1, \dots ,\vec{x}_p\}$ une famille de vecteurs de E.*

- *On dit que B est liée si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres, c'est à dire si :*

$$\exists(t_1, \dots ,t_p) \in K^p,(t_1, \dots ,t_p) \neq (0, \dots ,0) \text{ tel que } \sum_{i=1}^{p} t_i\vec{x}_i = \vec{0}$$

- *On dit que B est libre si elle n'est pas liée. Ses vecteurs sont alors linéairement indépendants*
- *On dit que B est génératrice de E (ou engendre E) si tout élément de E est combinaison linéaire des éléments de B.*

Définition 1.5 *Une famille $B = \{\vec{e}_1, \dots ,\vec{e}_p\}$ d'éléments de l'espace vectoriel E est une base de E si elle est libre et génératrice.*

Il existe une base particulière appelée base canonique définit de la manière suivante :

Définition 1.6 *On appelle base canonique la base composée des vecteurs $\{e_i\}_{i=1 \dots n}$ telle que le j-ième élément de e_i vaut 0 sauf si $i = j$ dans ce cas, il vaut 1.*

Ainsi tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ se décompose sur la base canonique de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n;\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Théorème 1.2 (de la dimension) *Dans un espace vectoriel engendré par une famille finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.*

Définition 1.7 *On appelle dimension d'un espace vectoriel E engendré par une famille finie, le nombre d'éléments de toute base de E. On la note «dim E».*

Si dans un espace vectoriel de dimension finie n, on travaille toujours avec la même base $B = \{\vec{e}_1, \dots ,\vec{e}_n\}$, alors un vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sur B sous la forme

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$$

L'élément $X = (\vec{x}_1, \dots ,\vec{x}_n)$ de K^n peut être choisi comme représentation de $\vec{x}$ sans ambiguité possible.

Proposition 1.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension n, F et G deux sous espaces vectoriels de E. Alors :*

1. *toute famille libre de n vecteurs est une base,*
2. *toute famille génératrice de n vecteurs est une base,*
3. *dim $F \leq$ dim E,*
4. *si $F \cap G = \{0\}$ alors dim $F+$ dim $G \leq$ dim E,*
5. *si de plus $E = F \oplus G$ alors dim $F+$ dim $G =$ dim E.*

1.2 Applications linéaires

Définition 1.8 (Application linéaire) *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps K. Une application $u : E \rightarrow F$ est appelée application linéaire si elle vérifie les propriétés suivantes :*

- $u(\vec{x}+\vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y})\ \forall \vec{x},\vec{y} \in E$
- $u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x})\ \forall \vec{x} \in E,\ \forall \lambda \in K$

L 'ensemble des applications linéaires de E dans F sera noté $\mathcal{L}(E,F)$.

On peut remarquer que l'application linéaire est une application qui conserve les structures d'espace vectoriel.

Définition 1.9 *1. On appelle noyau de u le sous espace vectoriel de E noté Ker(u) définit par:*

$$Ker(u) = \{\vec{x} \in E | u(\vec{x}) = 0\}$$

2. On appelle image de u le sous espace vectoriel de F noté Im(u) définit par:

$$Im(u) = \{\vec{y} \in F | \exists \vec{x} \in E \text{ tel que } \vec{y} = u(\vec{x})\}$$

Théorème 1.3
- *u est injective si et seulement si $Ker(u) = \{0\}$.*
- *u est surjective si et seulement si $Im(u) = F$.*

Définition 1.10 (Inverse) *Soit i_E (respectivement i_F) l'application identité de E (resp. F). L'application linéaire u de E dans F est inversible s'il existe une application linéaire notée u^{-1} de F dans E telle que :*

$$u^{-1}ou = i_E \quad et \quad uou^{-1} = i_F \tag{1.1}$$

Une application linéaire inversible est donc bijective c'est-à-dire injective et surjective.

Théorème 1.4 *Soit $u \in \mathcal{L}(E,E)$. On a les équivalences suivantes :*

- *u est injective*
- *u est surjective*
- *u est bijective*

Théorème 1.5 *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ une base de E. Alors :*

- *si u est injective, $\{u(\vec{e}_1), \ldots, u(\vec{e}_n)\}$ est une base de $Im(u)$,*
- *si u est surjective, $\{u(\vec{e}_1), \ldots, u(\vec{e}_n)\}$ est une famille génératrice de F,*
- *on a la relation suivante*

$$dim\, E = dim\ Ker(u) + dim\, Im(u).$$

Définition 1.11 *On appelle rang d'une application linéaire et on note «rang u» la dimension de $Im(u)$.*

1.3 Matrices

Dans cette partie, E, F et G représentent trois espaces vectoriels sur le corps K, de dimensions finies respectivement égales à n, p et q. Les familles $B_E = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, $B_F = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_p\}$ et $B_G = \{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_q\}$ sont des bases de E, F et G.

Définition 1.12 (Matrice) *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$. On appelle matrice associée à u dans les bases B_E et B_F le tableau A de scalaires (i.e. d'éléments de K) à p lignes et n colonnes tel que : la $j^{\text{ième}}$ colonne de A est constituée par les composantes dans la base de B_F du vecteur $u(\vec{e}_j)$.*

Si a_{ij} est l'élément de A situé à la $i^{\text{ième}}$ ligne de la $j^{\text{ième}}$ colonne, on a :

$$u(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \vec{f}_i$$

La matrice A à p lignes et n colonnes est dite de format (p,n), ou de type (p,n).

On ne peut raisonnablement rien démontrer sur les matrices sans faire référence aux applications linéaires qu'elles peuvent représenter. On utilise cette référence pour définir les opérations sur les matrices.

Opérations sur les matrices

Définition 1.13 *Soient A et B deux matrices de même format (p,n). On définit la somme $A+B$ de A et de B comme étant la matrice C, de format (p,n), dont le coefficient c_{ij} est donné par*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

C est la matrice de l'application linéaire somme des applications linéaires représentées par A et B.

On définit de même le produit du scalaire λ par la matrice A comme étant la matrice notée λA, obtenue en multipliant chaque coefficient de A par λ. L'ensemble des matrices à p lignes et n colonnes forme un espace vectoriel noté $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ (ou $\mathcal{M}_{p,n}$ lorsque le corps de base est explicite).

Définition 1.14 *Soient $u \in \mathcal{L}(F,G)$ et $v \in \mathcal{L}(E,F)$. On pose $w = uov$ (et donc $v \in \mathcal{L}(E,G)$). Soit A la matrice de u dans les bases B_F et B_G et B la matrice de v dans les bases B_E et B_F. Par définition, la matrice de w dans les bases B_E et B_G est égale au produit de A par B noté AB.*

Proposition 1.2 *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}$. Soit $C = AB$, alors $C \in \mathcal{M}_{n,q}$ et ses éléments sont donnés par la formule:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, q \tag{1.2}$$

Définition 1.15 *Une matrice A est inversible (dite également régulière ou non singulière) si l'application linéaire associée l'est. Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ est inversible, alors il existe une matrice inverse, notée A^{-1}, telle que*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}$.

Propriétés
En supposant que les matrices A,B et C sont de dimensions telles que leurs multiplications soient possibles, $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

- $C(A+B) = CA + CB$
- $(A+B)C = AC + BC$
- $A(BC) = (AB)C = ABC$
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Matrices de changement de base

Définition 1.16 *Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $B_E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$. Soit une nouvelle base de E notée $B' = \{\vec{e'}_1, \dots, \vec{e'}_n\}$. On appelle matrice de passage ou matrice de changement de base la matrice P dont les colonnes sont formées des composantes des éléments de E dans l'ancienne base E. On a donc :*

$$\vec{e'}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \vec{e}_i$$

La matrice de passage ne permet pas de calculer directement les nouvelles composantes d'un vecteur $\vec{x}$ en fonction des anciennes. Posons

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \vec{e'}_i$$

Soit X le vecteur de K^n formé des composantes de $\vec{x}$ dans l'ancienne base B_E et X' le vecteur de K^n formé des composantes de $\vec{x}$ dans la nouvelle base B'_E. On peut montrer que :

$$X = PX'$$

c'est-à-dire, étant donné qu'une matrice de changement de base est toujours inversible :

$$X' = P^{-1}X$$

Proposition 1.3 *Soit $u \in \mathcal{L}(E,E)$ dont la matrice dans la base B_E est A. Alors la matrice A' de u dans la base B'_E est donnée par la formule*

$$A' = P^{-1}AP$$

Les opérations de changement de base sont fondamentales en pratique car elles permettent de mettre les matrices carrées sous des formes plus «sympathiques» (structure diagonale, triangulaire supérieure ou inférieure).

Notations matricielles

Nous adopterons, sauf mention contraire, pour $A \in \mathcal{M}_{p,n}$ les notations suivantes :

- A_j désigne la jième colonne de la matrice A. A peut donc se représenter par :

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$$

- A^T dénote la transposée de la matrice A (obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A). On a donc $A^T \in \mathcal{M}_{n,p}$ et :

$$(A^T)_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j,\ 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n$$

- Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{C})$, on note $\bar{A}$ la matrice complexe conjuguée de A (dont les coefficients sont les complexes conjugués de ceux de A).
- Si A est une matrice carrée ($p = n$), on définit la trace de A comme la somme de ses éléments diagonaux :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- Nous noterons $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ la matrice diagonale D.
- Tout vecteur de K^n sera identifié à une matrice à n lignes et une colonne. Si X est un vecteur colonne, X^T représente un vecteur ligne (matrice à une ligne).

Définition 1.17 *Une matrice* $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ *telle que :*

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j \in \{1, \ldots, n\}$$

est appelée matrice symétrique. On a alors $A^T = A$.

1.4 Déterminants

La définition du déterminant nécessite l'introduction des notions de permutation et de signature par lesquelles nous débutons cette partie.

Définition 1.18 (Permutation) *Soit* $I_n = \{1,2, \ldots, n\}$. *On appelle permutation une application bijective de* I_n *dans lui même. On appelle transposition une permutation qui n'échange que deux éléments consécutifs (*τ_j *représente la permutation qui échange* j *et* $j+1$*).*

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des permutations de I_n. Toute permutation peut s'écrire comme un produit de transpositions. Cette décomposition n'est pas unique, mais quelle qu'elle soit, la parité du nombre de permutations est constante.

Définition 1.19 (Signature) *On appelle signature d'une permutation* σ *le nombre sign(*σ*) qui vaut +1 si l'on peut décomposer la permutation en un nombre pair de transpositions, -1 sinon.*

Définition 1.20 (Déterminant) *On appelle déterminant d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_{nn}$*, et on note det(*A*), le nombre*

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} sign(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \tag{1.3}$$

Le nombre de permutations d'un ensemble fini est fini et le cardinal de $\mathcal{P}_n$ est fini. Par suite, la somme de la formule 1.3 est finie.

Propriétés

Les propriétés principales du déterminant sont les suivantes :

1. $\det(\bar{A}) = \overline{\det(A)}$
2. $\det(A) = \det(A^T)$
3. $\forall \sigma \in \mathcal{P}_n$, $\det(A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \ldots, A_{\sigma(n)}) = \mathrm{sign}(\sigma)\det(A)$.
4. L'application qui à une colonne de A fait correspondre le déterminant de A est linéaire. En particulier, si une colonne de A est combinaison linéaire des autres, alors $\det(A) = 0$.

L'application qui aux colonnes de la matrice A fait correspondre le déterminant de A est multi-linéaire alternée. Le terme multi-linéaire provient de la propriété 4. Il en résulte que

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

On parle d'application alternée car d'après la propriété 3 la permutation de deux colonnes consécutives de la matrice change le signe du déterminant.
Propriétés

1. En général, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.
2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{nn}$. Alors :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(K)$. On note $A_{|i,j|} \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}(K)$ la matrice mineure de A obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j. D'un point de vue «pratique», le calcul d'un déterminant se fait la plupart du temps à l'aide du :

Théorème 1.6 (Développement suivant une colonne) *On peut calculer le déterminant en utilisant le développement suivant une colonne :*

$$\forall j \in \{1,\ldots,n\} \quad det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(A_{|i,j|}) \tag{1.4}$$

Le développement suivant les colonnes peut également se faire suivant les lignes par une formule analogue d'après la propriété 2 ci-dessus.

Définition 1.21 *Le scalaire* $(-1)^{i+j} det(A_{|i,j|})$ *est appelé cofacteur de l'élément* a_{ij}*. La matrice formée des cofacteurs est appelée comatrice et notée* $co(A)$*.*

Théorème 1.7 *Une matrice carrée A est inversible (ou régulière ou non-singulière) si et seulement si son déterminant est non nul. La formule d'inversion s'écrit alors :*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}[co(A)]^T \tag{1.5}$$

1.5 Produit scalaire

Définition 1.22 *On appelle produit scalaire sur E une application de $E \times E$ sur $\mathbb{R}$:*

$$(\vec{x},\vec{y}) \rightarrow <\vec{x},\vec{y}> = (\vec{x},\vec{y})_E$$

possédant les propriétés suivantes :
- $<\vec{x},\vec{x}> \geq 0$
- $<\vec{x},\vec{x}> = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$
- $<\vec{x},\vec{y}> = <\vec{y},\vec{x}>$
- $<\vec{x},\vec{y}+\vec{z}> = <\vec{x},\vec{y}> + <\vec{x},\vec{z}>$
- $<\vec{x},\alpha\vec{y}> = \alpha <\vec{x},\vec{y}> \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Corollaire 1.1 *Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique sur E.*

1.6 Norme vectorielle

Il existe plusieurs manières de définir la norme pour un vecteur. La plus connue de toutes est certainement la norme euclidienne d'un vecteur $\vec{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$:

$$\|(x_1,x_2,\ldots,x_n)\| = \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad x_i \in \mathbb{R}.$$

Cette norme représente géométriquement la longueur du vecteur. La définition d'une norme est toutefois plus générale.

Définition 1.23 *Une application* $\|.\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ *(ici, E est un espace vectoriel réel) est dite une norme vectorielle si elle respecte les propriétés suivantes :*

1. $\| \vec{x} \| \geq 0$, $\forall \vec{x} \in E$ *et* $\| \vec{x} \| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$.
2. $\| \lambda\vec{x} \| = | \lambda | \| \vec{x} \|$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in E$.
3. $\| \vec{x} + \vec{y} \| \leq \| \vec{x} \| + \| \vec{y} \|$, $\forall \vec{x}$, $\vec{y} \in E$.

On peut facilement vérifier que la définition de la norme euclidienne satisfait les propriétés ci-haut. Comme nous l'avons mentionné, il existe plusieurs normes pour un même espace vectoriel. Si on se limite aux normes définies sur $\mathbb{R}^n$, on trouve les normes p, dites usuelles, d'un vecteur $\vec{x}$. Celles-ci se calculent de la manière suivante :

$$\| \vec{x} \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^p| \right)^{1/p}.$$

Lorsque $p = 2$, on retrouve la définition de la norme euclidienne. Il y a également la norme dite infinie qui se définit comme suit :

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Cette dernière norme est l'une des plus utilisée avec la norme 2 et la norme 1. Il existe également des normes un peu plus exotiques (exemple norme elliptique, etc), mais nous allons travailler avec les normes que nous venons de donner.

Exemple 1.1 *Calculons les normes* 1, 2 *et* ∞ *du vecteur* $\vec{x} = (1,0,1,4)^T$. *On obtient*

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |x_i| = 6;$$

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} x_i^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2};$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 4} | x_i | = 4.$$

Comme on peut le constater, les différentes normes ne donnent pas des réponses identiques.

1.7 Vecteurs propres et valeurs propres de matrices

Définitions et propriétés

Dans toute le suite, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.