

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Avant-propos | i |
| Table des matières | iii |
| 1 Rappel d'algèbre linéaire | 1 |
| 1.1 Espace vectoriel | 1 |
| 1.2 Applications linéaires | 3 |
| 1.3 Matrices | 4 |
| 1.4 Déterminants | 6 |
| 1.5 Produit scalaire | 7 |
| 1.6 Norme vectorielle | 8 |
| 1.7 Vecteurs propres et valeurs propres de matrices | 8 |
| 1.8 Utilisation de <i>Matlab</i> | 10 |
| 2 Précisions numériques | 13 |
| 2.1 Introduction | 13 |
| 2.2 Représentation des nombres en machine | 13 |
| 2.3 Les entiers | 14 |
| 2.3.1 Représentation externe | 14 |
| 2.3.2 Représentation interne des entiers positifs | 14 |
| 2.4 Les réels | 15 |
| 2.4.1 Représentation externe | 15 |
| 2.4.2 Codage interne des réels | 15 |
| 2.5 Erreurs dues à la représentation | 15 |
| 2.5.1 Propriétés de l'arithmétique de l'ordinateur | 16 |
| 2.5.2 Opération soustraction | 17 |
| 2.5.3 Stabilité | 17 |
| 2.6 Notion du meilleur algorithme | 18 |
| 2.7 Utilisation de <i>Matlab</i> | 18 |
| 2.7.1 Définition des variables | 18 |
| 2.7.2 Manipulation des nombres | 19 |
| 2.8 Exercices résolus | 21 |
| 3 Interpolation polynomiale | 27 |
| 3.1 Introduction | 27 |
| 3.2 Problèmes d'interpolation | 27 |
| 3.2.1 Interpolation linéaire | 27 |
| 3.3 Techniques de l'interpolation polynomiale | 28 |
| 3.4 Interpolation dans la base de Lagrange | 28 |
| 3.4.1 Erreur d'interpolation polynomiale | 30 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.4.2 | Méthode de Neville-Aitken | 31 |
| 3.5 | Interpolation dans la base de Newton | 32 |
| 3.6 | Interpolation par fonctions spline | 33 |
| 3.6.1 | Interpolation d'Hermite | 34 |
| 3.6.2 | L'erreur de l'interpolation par spline | 36 |
| 3.7 | Utilisation de <i>Matlab</i> | 37 |
| 3.7.1 | Opérations sur les polynômes | 37 |
| 3.7.2 | Manipulation des polynômes | 38 |
| 3.7.3 | Évaluation d'un polynôme | 39 |
| 3.7.4 | Interpolation linéaire et non linéaire | 39 |
| 3.8 | Exercices résolus | 41 |
| 4 | Dérivation numérique | 53 |
| 4.1 | Dérivées numériques d'ordre 1 et erreur de troncature | 53 |
| 4.2 | Dérivées numériques d'ordre supérieur | 54 |
| 4.3 | Dérivées numériques et interpolation | 55 |
| 4.4 | Etude de l'erreur de dérivation | 56 |
| 4.5 | Extrapolation de Richardson | 58 |
| 4.6 | Méthode des différences finis | 58 |
| 4.6.1 | Exemple de thermique | 58 |
| 4.6.2 | Principe de la méthode | 58 |
| 4.7 | Utilisation de <i>Matlab</i> | 60 |
| 4.8 | Exercices résolus | 60 |
| 5 | Intégration numérique | 67 |
| 5.1 | Introduction | 67 |
| 5.2 | La méthode des rectangles | 68 |
| 5.3 | La méthode des trapèzes | 68 |
| 5.4 | La méthode de Simpson | 69 |
| 5.5 | Méthode de Newton-Côtes | 70 |
| 5.6 | Méthode de Gauss-Legendre | 70 |
| 5.6.1 | Position du problème | 70 |
| 5.6.2 | Polynômes de Legendre | 71 |
| 5.6.3 | Choix des α_i et des x_i ($i = 0, \dots, n$) | 71 |
| 5.7 | Utilisation de <i>Matlab</i> | 72 |
| 5.7.1 | Fonctions Matlab utilisées pour l'intégration numérique | 72 |
| 5.7.2 | Méthode du Trapèze | 73 |
| 5.7.3 | Méthode de Simpson | 74 |
| 5.8 | Exercices résolus | 75 |
| 6 | Résolution d'équations non linéaires | 89 |
| 6.1 | Introduction | 89 |
| 6.2 | Séparation des racines | 89 |
| 6.3 | Approximation d'une racine séparée | 90 |
| 6.3.1 | Méthode de dichotomie (ou de bisection) | 90 |
| 6.3.2 | Méthode du point fixe (ou des approximations successives) | 90 |
| 6.3.3 | Premier critère de convergence | 92 |
| 6.3.4 | Critères d'arrêt des itérations | 92 |
| 6.3.5 | Deuxième critère de convergence (critère local) | 93 |
| 6.3.6 | Méthode de Newton (ou méthode des tangentes) | 93 |
| 6.3.7 | Méthode des sécantes | 95 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 6.3.8 | Méthode de Regula falsi | 95 |
| 6.4 | Ordre d'un processus itératif | 95 |
| 6.5 | Utilisation de <i>Matlab</i> | 96 |
| 6.5.1 | Recherche des racines polynomiales | 96 |
| 6.6 | Exercices résolus | 97 |
| 7 | Norme matricielle et conditionnement | 109 |
| 7.1 | Introduction | 109 |
| 7.2 | Norme matricielle | 109 |
| 7.3 | Conditionnement d'une matrice | 112 |
| 7.3.1 | Approximation de $K(A)$ | 114 |
| 7.4 | Préconditionnement | 114 |
| 7.5 | Utilisation de <i>Matlab</i> | 115 |
| 7.5.1 | Matrices et Vecteurs | 115 |
| 7.5.2 | conditionnement d'une matrice | 116 |
| 7.6 | Exercices résolus | 117 |
| 8 | Méthodes directes | 121 |
| 8.1 | Introduction | 121 |
| 8.2 | Méthode des déterminants ou méthode de Cramer | 121 |
| 8.2.1 | Inversion d'une matrice par la méthode de Cramer | 121 |
| 8.3 | Système à matrice triangulaire supérieure | 122 |
| 8.4 | Méthode de Gauss | 122 |
| 8.4.1 | Résolutions en parallèle | 125 |
| 8.5 | Méthode de Gauss-Jordan | 125 |
| 8.5.1 | Principe de la méthode | 125 |
| 8.5.2 | Calcul de la matrice inverse par l'algorithme de Gauss-Jordan | 127 |
| 8.6 | Décomposition LU | 127 |
| 8.7 | Méthode de Cholesky | 129 |
| 8.8 | Utilisation de <i>Matlab</i> | 130 |
| 8.8.1 | Opérations sur les matrices | 130 |
| 8.8.2 | Systèmes d'équations linéaires | 132 |
| 8.9 | Exercices résolus | 134 |
| 9 | Méthodes itératives | 141 |
| 9.1 | Introduction | 141 |
| 9.2 | Les techniques itératives classiques | 142 |
| 9.2.1 | La méthode de Jacobi | 142 |
| 9.2.2 | La méthode de Gauss-Seidel | 144 |
| 9.2.3 | Méthode de relaxation | 145 |
| 9.2.4 | Les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation, par blocs | 146 |
| 9.3 | Convergence des méthodes itératives | 146 |
| 9.4 | Utilisation de <i>Matlab</i> | 148 |
| 9.5 | Exercices résolus | 148 |
| 10 | Méthodes numériques de calcul des valeurs propres et vecteurs propres | 155 |
| 10.1 | Introduction | 155 |
| 10.2 | Calcul direct du $\det(A - \lambda I)$ | 155 |
| 10.3 | Méthode de Krylov | 156 |
| 10.4 | Méthode de Leverrier | 157 |
| 10.5 | Méthode de Jacobi | 157 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 10.6 | Méthode de la puissance itérée | 159 |
| 10.7 | Méthode de la puissance inverse | 159 |
| 10.8 | Méthode de Givens-Householder | 160 |
| 10.9 | Utilisation de <i>Matlab</i> | 161 |
| 10.10 | Exercices résolus | 162 |
| 11 | Approximation au sens des moindres carrés | 177 |
| 11.1 | Introduction | 177 |
| 11.2 | Formulation analytique | 177 |
| 11.3 | Formulation algébrique | 179 |
| 11.4 | Résolution numérique par factorisation QR | 181 |
| 11.5 | Applications | 182 |
| 11.6 | Utilisation de <i>Matlab</i> | 183 |
| 11.7 | Exercices | 183 |
| 12 | Résolution numérique des équations différentielles | 191 |
| 12.1 | Introduction | 191 |
| 12.2 | Problème de Cauchy | 192 |
| 12.3 | Résolution numérique | 192 |
| 12.3.1 | Méthode d'Euler | 193 |
| 12.3.2 | Méthode de Runge-Kutta à pas unique | 193 |
| 12.3.3 | Méthodes d'Adams à pas multiple | 195 |
| 12.3.4 | Méthode de Prédicteur-Correcteur | 198 |
| 12.4 | Utilisation de <i>Matlab</i> | 199 |
| 12.5 | Exercices résolus | 201 |
| 13 | Introduction à l'optimisation | 207 |
| 13.1 | Introduction | 207 |
| 13.2 | Rappels sur les fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} | 207 |
| 13.3 | Optimisation sans contraintes | 209 |
| 13.4 | Méthode de la section d'or | 211 |
| 13.5 | Méthodes de la descente | 212 |
| 13.6 | Utilisation de <i>Matlab</i> | 214 |
| 13.7 | Exercices résolus | 215 |
| | Introduction à Matlab | 219 |
| A | Introduction | 219 |
| B | Démarrage de <i>Matlab</i> | 220 |
| C | Fonctions mathématiques | 221 |
| D | Opérateurs et programmation sous <i>Matlab</i> | 221 |
| E | Écriture d'un script <i>Matlab</i> | 223 |
| F | Génération de graphique avec <i>Matlab</i> | 223 |
| | Index | 225 |
| | Bibliographie | 227 |