Thème 1

Polynômes de Bernoulli

A. Commentaires sur le sujet et notions abordées

Il arrive fréquemment que le calcul exact d'une intégrale soit difficile, voire impossible pour certaines fonctions et il est courant, dans ce cas, de chercher à approcher la valeur de l'intégrale en utilisant des polynômes. Ce sujet propose une méthode de calcul approché utilisant les polynômes de Bernoulli.

Il offre une révision des notions fondamentales sur les applications linéaires et les polynômes et s'adresse aux candidats de tous niveaux.

B. Le sujet

Dans tout ce problème, on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Partie I. Construction des polynômes de Bernoulli

On considère l'application Δ définie sur E par :

$$\forall P \in E,\ \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Δ_n la restriction de Δ à E_n.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Δ_n est un endomorphisme de E_n.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Déterminer le noyau de Δ_n.
   (b) En déduire le rang puis l'image de Δ_n.
3. Déterminer alors le noyau et l'image de Δ.
4. Prouver alors qu'il existe une unique suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels telle que $B_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta(B_n) = nX^{n-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Partie II. Propriétés des polynômes de Bernoulli

1. (a) Calculer B_1 et B_2.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de B_n.
2. Prouver que :
$$\forall n \geqslant 2,\ B_n(0) = B_n(1).$$
3. (a) On considère la famille $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = \frac{B'_{n+1}}{n+1}.$$
   Expliciter C_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\Delta(C_n)$.
   (b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B'_n = nB_{n-1}.$$
4. (a) Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X).$$
   (b) En déduire que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = B_{2k+1}(1) = 0.$$
5. (a) Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(X) = 2^{n-1}\left[B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right].$$
   (b) En déduire que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2^{1-2k} - 1\right) B_{2k}(0).$$
6. (a) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, B_{2k-1} ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et que B_{2k} s'annule exactement une fois sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.
   (b) En déduire que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \max_{[0,1]} |B_{2k}| = |B_{2k}(0)|.$$

Partie III. Calcul approché d'une intégrale

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et f désigne une fonction de classe C^{2n} sur $[0,1]$.

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note :
$$R_k = \frac{1}{(2k)!}\int_0^1 f^{(2k)}(x) B_{2k}(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Déterminer une expression de R_k en fonction de R_{k+1}.

(b) En déduire que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(1)\right] + R_n.$$

2. Prouver que :

$$|R_n| \leqslant M\,\frac{|B_{2n}(0)|}{(2n)!},$$

où M désigne le maximum de $\left|f^{(2n)}(x)\right|$ sur $[0,1]$.

C. Indications et méthodes de résolution

Partie I. Construction des polynômes de Bernoulli

2. (a) Remarquer que, pour tout élément P de $\mathrm{Ker}(\Delta_n)$, si P admet une racine complexe λ, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda + k$ est racine de P.

(b) Après avoir déterminé le rang de Δ_n grâce au théorème du rang, remarquer que, pour tout polynôme P de E_n, $P(X+1) - P(X)$ appartient à E_{n-1}.

3. Pour déterminer le noyau de Δ, remarquer que, si P est un élément non nul de $\mathrm{Ker}(\Delta)$, P appartient à $\mathrm{Ker}(\Delta_n)$ où n est le degré de P.

Pour déterminer l'image de Δ, remarquer que, pour tout Q appartenant à E, il existe un entier naturel n tel que Q appartienne à $\mathrm{Im}(\Delta_n)$.

4. Commencer par remarquer qu'il existe un polynôme P appartenant à E tel que $\Delta(P) = nX^{n-1}$ puis raisonner par analyse-synthèse en utilisant la linéarité de Δ pour exprimer B_n en fonction de P.

Partie II. Propriétés des polynômes de Bernoulli

1. (b) Exprimer le monôme de plus haut degré de $B_n(X+1) - B_n(X)$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) en fonction des coefficients et du degré de B_n puis identifier avec nX^{n-1}.

3. (b) Utiliser la définition de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. (a) Raisonner comme dans la question 3.

5. (a) Raisonner comme dans la question 3.

6. (a) Procéder par récurrence sur k en utilisant le théorème de la bijection.

(b) Utiliser la monotonie de B_{2k} (vue dans la question précédente).

Partie III. Calcul approché d'une intégrale

1. (a) Effectuer deux intégrations par parties.

(b) Sommer les égalités précédentes.

2. Utiliser la croissance de l'intégration.

D. Correction détaillée du sujet

Partie I. Construction des polynômes de Bernoulli

1. ► Pour tout $P \in E$, $P(X)$ et $P(X+1)$ sont des polynômes à coefficients réels, donc $\Delta(P)$ est un polynôme à coefficients réels et Δ est une application de E dans E. De plus, pour tout $(P,Q) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) \\ &= \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X) \\ &= \lambda\,[P(X+1) - P(X)] + [Q(X+1) - Q(X)] \\ &= \lambda \Delta(P) + \Delta(Q),\end{aligned}$$

donc Δ est linéaire, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } E}$$

► Comme Δ est linéaire sur E et comme E_n est un sous-espace vectoriel de E, Δ_n est linéaire sur E_n. De plus, pour tour $P \in E$, $P(X)$ et $P(X+1)$ sont des polynômes à coefficients réels, tous deux de degré inférieur ou égal à n, donc $\Delta_n(P)$ aussi et Δ_n est donc une application de E_n dans E_n, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\Delta_n \text{ est un endomorphisme de } E_n}$$

2. (a) Soit $P \in E_n$. On a :

$$\begin{aligned}P \in \operatorname{Ker}(\Delta_n) &\Leftrightarrow P(X+1) - P(X) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{C},\ P(x+1) = P(x).\end{aligned} \tag{1.1}$$

On constate alors que les polynômes constants vérifient cette dernière égalité, donc :

$$E_0 \subset \operatorname{Ker}(\Delta_n).$$

Supposons alors que P appartienne à $\operatorname{Ker}(\Delta_n)$ et ne soit pas un polynôme constant. D'après le théorème de d'Alembert, P admet alors au moins une racine complexe λ et alors, d'après (1.1) avec $x = \lambda + k$:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(\lambda + k + 1) = P(\lambda + k)$$

donc la suite $(P(\lambda + k))_{k\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $P(\lambda)$, et donc :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(\lambda + k) = 0.$$

Ainsi, P admet une infinité de racines distinctes, donc P est le polynôme nul, ce qui est absurde (puisqu'on a supposé que P n'était pas constant). On en déduit que :

$$\operatorname{Ker}(\Delta_n) \subset E_0$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\Delta_n) = E_0}$$

Commentaire sur la question
Il s'agit d'une question très classique, qui doit donc être parfaitement maîtrisée. Retenir que, plus généralement, les fonctions polynômes constantes sont les seules fonctions polynômes périodiques.

(b) ► Comme Δ_n est un endomorphisme de E_n et comme E_n est un espace vectoriel de dimension finie égale à $n+1$, on a, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\Delta_n)) + \mathrm{Rg}(\Delta_n) = \dim(E_n) = n+1$$

et donc, comme $\mathrm{Ker}(\Delta_n)$ est de dimension 1 d'après le résultat précédent :

$$\boxed{\mathrm{Rg}(\Delta_n) = n}$$

► On peut remarquer que, comme $P(X+1)$ et $P(X)$ sont de même degré, on a :

$$\forall P \in E_{n-1},\ \Delta_n(P) \in E_{n-1}.$$

Soit alors P un polynôme de degré n. Comme $P(X+1)$ et $P(X)$ ont le même monôme de degré n, alors $P(X+1) - P(X)$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc :

$$\forall P \in E_n,\ \Delta_n(P) \in E_{n-1}$$

d'où :

$$\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset E_{n-1}$$

et finalement, comme $\mathrm{Im}(\Delta_n)$ et E_{n-1} sont de même dimension (égale à n) :

$$\boxed{\mathrm{Im}(\Delta_n) = E_{n-1}}$$

3. ► On peut déjà remarquer que les polynômes constants appartiennent à $\mathrm{Ker}(\Delta)$. De plus, pour tout $P \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P appartienne à E_n et alors :

$$\begin{aligned} \Delta(P) = 0 &\Leftrightarrow \Delta_n(P) = 0 \\ &\Leftrightarrow P \in E_0, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta) = E_0}$$

► Soit $Q \in E$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que Q appartienne à E_{n-1}, donc à $\mathrm{Im}(\Delta_n)$ et il existe donc un polynôme P de E_n tel que :

$$\Delta_n(P) = Q$$

et donc :

$$\forall Q \in E,\ \exists\, P \in E \ / \ \Delta(P) = Q,$$

ce qui nous permet de conclure, comme $\mathrm{Im}(\Delta)$ est inclus dans E :

$$\boxed{\mathrm{Im}(\Delta) = E}$$

4. Tout d'abord, le polynôme $B_0 = 1$ est défini de manière unique. Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$. Comme nX^{n-1} appartient à E, il existe, d'après le résultat de la question précédente, un polynôme P appartenant à E et tel que :

$$\Delta(P) = nX^{n-1}.$$

Supposons alors qu'il existe un polynôme B_n tel que :

$$\Delta(B_n) = nX^{n-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

On a alors : $\Delta(B_n) = \Delta(P)$ et donc, comme Δ est linéaire : $\Delta(B_n - P) = 0$. D'après la question précédente, il existe donc un réel k tel que : $B_n = P + k$. On a alors, par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 &\Leftrightarrow \int_0^1 [P(x) + k]\ \mathrm{d}x = 0 \\
&\Leftrightarrow k = -\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow B_n = P - \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ainsi, s'il existe un tel polynôme B_n, alors celui-ci est unique. De plus, en notant $B_n = P + k$ où $k = -\displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$, alors on a, comme Δ est linéaire :

$$\Delta(B_n) = \Delta(P) + \Delta(k) = nX^{n-1}$$

et par linéarité de l'intégration :

$$\int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x + k = 0,$$

ce qui nous permet de conclure :

Il existe une unique suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels telle que $B_0 = 1$ et : $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta(B_n) = nX^{n-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

N.B. Dans le raisonnement précédent, le polynôme P peut être choisi dans E_n d'après le résultat de la question I.2b, donc le polynôme B_n appartient aussi à E_n.

Partie II. Propriétés des polynômes de Bernoulli

1. (a) ▶ En notant $B_1 = aX + b$, on a : $B_1(X+1) = aX + a + b$ donc :

$$\Delta(B_1) = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

et alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_1(x)\,\mathrm{d}x = 0 &\Leftrightarrow \int_0^1 (x+b)\,\mathrm{d}x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{2} + bx\right]_0^1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} + b = 0 \\ &\Leftrightarrow b = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2}}$$

▶ De même, en notant $B_2 = aX^2 + bX + c$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta(B_2) = 2X &\Leftrightarrow \left[a\,(X+1)^2 + b\,(X+1) + c\right] - \left[aX^2 + bX + c\right] = 2X \\ &\Leftrightarrow 2aX + a + b = 2X \end{aligned}$$

donc, deux polynômes étant égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux :

$$\begin{aligned} \Delta(B_2) = 2X &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

et alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_2(x)\,\mathrm{d}x = 0 &\Leftrightarrow \int_0^1 \left(x^2 - x + c\right)\mathrm{d}x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + cx\right]_0^1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de B_n, on a :

$$B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}. \tag{1.2}$$

B_n n'étant pas le polynôme nul (sinon l'égalité ne serait pas vraie), on note p son degré et :

$$B_n = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k.$$

On a alors :

$$B_n(X+1) = \sum_{k=0}^{p} a_k (X+1)^k.$$

On sait déjà que $B_n(X+1) - B_n(X)$ est alors de degré inférieur ou égal à $p-1$ (d'après la question I.2b). De plus, le monôme de degré $p-1$ de $B_n(X+1)$ est $(pa_p + a_{p-1})X^{p-1}$ donc le monôme de degré $p-1$ de $B_n(X+1) - B_n(X)$ est pa_pX^{p-1}.
Comme pa_p n'est pas nul ($a_p \neq 0$ car c'est le coefficient dominant de B_n), on en déduit que $B_n(X+1) - B_n(X)$ est de degré $p-1$ et donc, d'après (1.2) :

$$p - 1 = n - 1 \quad \text{et} \quad pa_p = n$$

donc B_n est de degré n et de coefficient dominant 1, ce qui nous permet de conclure, ce résultat étant encore valable si $n = 0$:

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ B_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } 1}$$

Commentaire sur la question
Se souvenir que, dans la plupart des cas, pour déterminer le degré et le coefficient dominant d'un polynôme vérifiant une certaine égalité polynômiale, on peut considérer son monôme dominant et identifier dans l'égalité. Attention cependant à ne négliger aucun terme, notamment ici le terme de degré $p-1$ de $(X+1)^p$, égal à pa_pX^{p-1} grâce à la formule du binôme de Newton).

2. On a :

$$\forall n \geqslant 2,\ B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$$

donc en évaluant en 0 :

$$\forall n \geqslant 2,\ B_n(1) - B_n(0) = 0$$

et donc :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ B_n(0) = B_n(1)}$$

3. (a) ► On a :

$$\boxed{C_0 = B_1' = 1}$$