

Chapitre 1

Algèbre

1.1 Exercice 1

Question de cours : Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite réelle décroissante soit convergente.

Soit n un entier de \mathbb{N}^* et M_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que le réel λ est valeur propre de M_n si et seulement si le polynôme $P_n(X) = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - 1$ admet λ comme racine.
 (b) Déterminer alors le sous-espace propre associé à λ .
2. (a) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, le polynôme P_k admet une unique racine dans l'intervalle $]1, +\infty[$, racine notée a_k .
 (b) Établir la convergence de la suite $(a_k)_{k \geq 2}$.
 (c) Déterminer sa limite ℓ .
3. (a) Montrer que pour tout entier p de \mathbb{N}^* , le polynôme P_{2p} admet une unique racine dans $] -\infty, 0[$, racine notée b_p .
 (b) Établir la décroissance, puis la convergence de la suite $(b_p)_{p \geq 1}$. Déterminer sa limite ℓ' .
 (c) Déterminer un équivalent simple de $b_p - \ell'$.
4. (a) Déterminer les valeurs de n de \mathbb{N}^* pour lesquelles la matrice M_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 (b) Déterminer les valeurs de n de \mathbb{N}^* pour lesquelles la matrice M_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Corrigé

1. (a) Soit λ une valeur propre de M_n et $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

La relation $M_n V = \lambda V$ entraîne alors les systèmes suivants :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = \lambda x_1 \\ x_{i-1} = \lambda x_i \quad (2 \leq i \leq n) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = \lambda x_1 \\ x_i = \lambda^{n-i} x_n \quad (1 \leq i \leq n) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \right) x_n = \lambda^n x_n \\ x_i = \lambda^{n-i} x_n \quad (1 \leq i \leq n) \end{cases} \end{aligned}$$

Ce dernier système admet des solutions si et seulement si l'équation :

$$(\lambda^n - (1 + \lambda + \dots + \lambda^{n-1}))x_n = 0$$

est vérifiée.

Comme V est vecteur propre, il est non nul et on a donc nécessairement $x_n \neq 0$. En effet, si x_n était nul, les équations précédentes fourniraient $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, ce qui est donc impossible.

Finalement, si le système $M_n V = \lambda V$ possède des solutions non nulles alors $P_n(\lambda) = 0$.

Réciproquement supposons que $P_n(\lambda) = 0$, nous avons donc :

$$\lambda^n - \lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} - \dots - 1 = 0$$

Au regard des coefficients de la matrice M_n si l'on pose :

$$X = \begin{bmatrix} \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

colonne non nulle puisque son dernier élément vaut 1, nous constatons que :

$$M_n X = \begin{bmatrix} \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \dots + 1 \\ \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^n \\ \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix}$$

et puisque $P_n(\lambda) = 0$

$$M_n X = \begin{bmatrix} \lambda^n \\ \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-3} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

En conclusion $M_n X = \lambda X$ et X est donc un vecteur propre de M_n de valeur propre associée λ .

- (b) On constate alors que le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur V_λ , où :

$$V_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. (a) Pour chercher les racines de P_k , on remarque que :

$$P_k(X) = X^k - \sum_{j=0}^{k-1} X^j$$

donc, en utilisant la classique identité remarquable

$$(X-1) \left(\sum_{j=0}^{k-1} X^j \right) = X^k - 1$$

on obtient :

$$(X-1)P_k(X) = X^{k+1} - X^k - (X^k - 1) = X^{k+1} - 2X^k + 1 = Q_k(X)$$

Comme $X-1$ ne possède pas de racine sur l'intervalle $]1, +\infty[$, chercher les racines de P_k sur l'intervalle considéré revient à chercher celle de Q_k .

On étudie donc ce polynôme sur cet intervalle.

Sa dérivée est :

$$Q'_k(X) = (k+1)X^k - 2kX^{k-1}$$

soit

$$Q'_k = X^{k-1} ((k+1)X - 2k)$$

Cette dérivée s'annule en $\frac{2k}{k+1}$, valeur qui, comme k est supérieur ou égal à 2, est bien strictement plus grande que 1.

On obtient donc le tableau de variation suivant :

12 Réussir l'oral d'entrée à HEC-Mathématiques

x	1	$\frac{2k}{k+1}$	$+\infty$
$Q'_k(x)$	-	0	+
$Q_k(x)$	0	$-m$	$+\infty$

où m est un réel strictement positif.

La fonction Q_k reste strictement négative sur l'intervalle $]1, \frac{2k}{k+1}]$ tandis que le théorème de la bijection appliqué à Q_k sur l'intervalle $]\frac{2k}{k+1}, +\infty[$ permet d'affirmer qu'il existe un unique réel a_k de $]\frac{2k}{k+1}, +\infty[$ tel que $Q_k(a_k) = 0$ et donc tel que $P_k(a_k) = 0$.

On constate de plus que, d'une part $\frac{2k}{k+1} < 2$ et que d'autre part,

$Q_k(2) = 1$ est strictement positif.

Le théorème de la bijection permet alors, en revenant aux antécédents, d'affirmer que a_k est strictement inférieur à 2.

On a donc même plus précisément le tableau suivant :

x	1	$\frac{2k}{k+1}$	1 2	$+\infty$
$Q'_k(x)$	-	0	+	
$Q_k(x)$	0	$-m$	0 -1	$+\infty$

Ceci permet d'affiner l'étude de $a_k : 1 < a_k < 2$.

- (b) La suite (a_k) étant bornée, on étudie son éventuelle monotonie afin de montrer sa convergence.

Pour cela, on s'intéresse à l'expression $Q_{k+1}(X) - Q_k(X)$.

On a successivement :

$$Q_{k+1}(X) - Q_k(X) = [X^{k+2} - 2X^{k+1} + 1] - [X^{k+1} - 2X^k + 1]$$

$$Q_{k+1}(X) - Q_k(X) = X^{k+2} - 3X^{k+1} + 2X^k = X^k(X-1)(X-2)$$

Comme $Q_{k+1}(a_{k+1}) = 0$, en évaluant cette dernière égalité en a_{k+1} , on obtient :

$$-Q_k(a_{k+1}) = a_{k+1}^k(a_{k+1} - 1)(a_{k+1} - 2)$$

Or, on vient de voir que le réel a_k était strictement compris entre 1 et 2.

Cela, combiné à la dernière égalité obtenue, permet d'affirmer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, $Q_k(a_{k+1})$ est strictement positif, c'est-à-dire que l'on a l'inégalité

$$Q_k(a_{k+1}) > Q_k(a_k)$$

Comme, sur l'intervalle considéré, la fonction Q_k est une bijection strictement croissante, on en déduit en revenant aux antécédents que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a :

$$a_k < a_{k+1}$$

Ainsi, la suite $(a_k)_{k \geq 2}$ est croissante et majorée, elle est donc convergente.

- (c) On sait que la suite $(a_k)_{k \geq 2}$ est convergente et que sa limite ℓ appartient à $[1, 2]$. La relation $Q_k(a_k) = 0$ donne $a_k^{k+1} - 2a_k^k + 1 = 0$, soit encore :

$$\forall k \geq 2 \quad a_k^k(a_k - 2) = -1$$

Comme, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, a_k est strictement positif, on peut écrire cette dernière égalité sous la forme :

$$\forall k \geq 2 \quad e^{k \ln(a_k)}(a_k - 2) = -1$$

Si ℓ appartenait à $]1, 2[$, on obtiendrait, par continuité

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{k \ln(a_k)} = +\infty$$

et donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{k \ln(a_k)}(a_k - 2) = -\infty$$

Or $e^{k \ln(a_k)}(a_k - 2) = -1$, donc $e^{k \ln(a_k)}(a_k - 2)$ ne peut pas tendre vers $-\infty$.

Reste donc comme possibilités $\ell = 1$ ou $\ell = 2$.

Or la suite est croissante et a_2 , qui est la solution positive de l'équation $X^2 - X - 1$, est strictement plus grand que 1.

Le passage à la limite dans l'inégalité $a_2 \leq a_k$ prouve donc que la valeur $\ell = 1$ est impossible.

Conclusion : $\ell = 2$.

3. (a) On procède comme précédemment :

$$(X - 1)P_{2p}(X) = X^{2p+1} - 2X^{2p} + 1$$

d'où, en posant $Q_{2p}(X) = X^{2p+1} - 2X^{2p} + 1$

$$(X - 1)P_{2p}(X) = Q_{2p}(X)$$

On obtient $Q'_{2p}(X) = (2p + 1)X^{2p} - 4pX^{2p-1}$ soit

$$Q'_{2p}(X) = X^{2p-1}((2p + 1)X - 4p)$$

14 Réussir l'oral d'entrée à HEC-Mathématiques

Lorsque X est négatif, X^{2p-1} et $(2p+1)X - 4p$ sont négatifs.

On en déduit que Q_{2p} réalise une bijection strictement croissante de $] -\infty, 0]$ sur $] -\infty, 1]$.

Le théorème de la bijection permet d'affirmer qu'il existe bien un unique réel b_p appartenant à $] -\infty, 0]$ tel que $P_{2p}(b_p) = 0$.

- (b) Le calcul de $Q_{2p}(-1)$ donne $Q_{2p}(-1) = -2$.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-1	b_p	0
$Q'_{2p}(x)$			+	
$Q_{2p}(x)$	$-\infty$	-2	0	1

On constate donc que la suite (b_p) est bornée.

Pour étudier sa monotonie, on procède comme d'habitude :

En posant $R_p(X) = Q_{2p+2}(X) - Q_{2p}(X)$, on a successivement :

$$R_p(X) = (X^{2p+3} - 2X^{2p+2} + 1) - (X^{2p+1} - 2X^{2p} + 1)$$

$$R_p(X) = X^{2p+3} - 2X^{2p+2} - X^{2p+1} + 2X^{2p}$$

$$R_p(X) = X^{2p}(X^3 - 2X^2 - X + 2)$$

Soit finalement

$$Q_{2p+2}(X) - Q_{2p}(X) = X^{2p}(X-1)(X+1)(X-2)$$

On évalue cette égalité en b_{p+1} :

$$Q_{2p+2}(b_{p+1}) - Q_{2p}(b_{p+1}) = b_{p+1}^{2p}(b_{p+1} - 1)(b_{p+1} + 1)(b_{p+1} - 2)$$

Or, d'une part, $Q_{2p+2}(b_{p+1}) = 0$ et d'autre part le tableau de variation précédent permet d'obtenir :

$$b_{p+1}^{2p} > 0, \quad b_{p+1} - 1 < 0, \quad b_{p+1} + 1 > 0, \quad b_{p+1} - 2 < 0.$$

Tout cela fait que $Q_{2p}(b_{p+1}) < 0$.

L'étude du tableau de variation de Q_{2p} montre alors, toujours en revenant aux antécédents, que $b_{p+1} < b_p$, puisque $Q_{2p}(b_{2p}) = 0$.

Comme cette inégalité est vraie pour tout entier p non nul, on en déduit que la suite $(b_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Le tableau de variation de Q_{2p} montre que la suite $(b_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par -1 . La suite est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

D'après l'étude précédente, le réel ℓ' appartient à l'intervalle $[-1, 0]$.

La relation $Q_{2p}(|b_p|) = 0$ donne successivement :

$$-|b_p|^{2p+1} - 2|b_p|^{2p} + 1 = 0$$

$$-|b_p|^{2p} [|b_p| + 2] = -1$$

$$-e^{2p \ln(|b_p|)} [|b_p| + 2] = -1$$

Une analyse semblable à celle faite pour la suite (a_n) , permet de conclure que l'hypothèse $-1 < \ell' < 0$ conduit à une impossibilité. Il reste donc $\ell' = 0$ ou $\ell' = -1$.

La suite est décroissante. Un calcul simple montre que b_2 est strictement négatif. On en déduit donc que la seule possibilité est $\ell' = -1$.

Conclusion : $\ell' = -1$.

- (c) On cherche donc un équivalent de $1 + b_p$. Posons $\alpha_p = 1 + b_p$ donc (α_p) est une suite qui tend vers 0.

On a

$$(\alpha_p - 1)^{2p+1} - 2(\alpha_p - 1)^{2p} + 1 = 0$$

soit

$$(\alpha_p - 1)^{2p} (\alpha_p - 1 - 2) + 1 = 0$$

ou encore :

$$(\alpha_p - 1)^{2p} (\alpha_p - 3) + 1 = 0$$

et

$$(\alpha_p - 1)^{2p} = \frac{1}{3 - \alpha_p}.$$

En appliquant la fonction \ln : $2p \ln |1 - \alpha_p| = \ln \frac{1}{3 - \alpha_p}$.

Comme la suite (α_p) tend vers 0, la quantité $1 - \alpha_p$ est positive à partir d'un certain rang. On a donc, à partir d'un certain rang, :

$$2p \ln (1 - \alpha_p) = \ln \frac{1}{3 - \alpha_p}$$

Toujours en utilisant le fait que (α_p) tend vers 0, on a l'équivalent classique :

$$\ln (1 - \alpha_p) \underset{0}{\sim} -\alpha_p$$

En prenant un équivalent des chaque membre de l'égalité, on obtient donc :

$$-2p\alpha_p \underset{0}{\sim} \ln \frac{1}{3}.$$

soit :

$$(b_p - \ell') \underset{0}{\sim} \frac{\ln(3)}{2p}$$

16 Réussir l'oral d'entrée à HEC-Mathématiques

4. (a) Si n est pair, en posant $n = 2p$ on obtient pour Q_n le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	b_p	0	1	$\frac{2n}{2n+1}$	a_{2p}	$+\infty$
$Q'_n(x)$		+	0	-	0	+	
$Q_n(x)$	$-\infty$		0	1		0	$+\infty$

Comme 1 n'est pas racine de P_n , on en déduit que P_n possède deux racines distinctes a_{2p} et b_p .

M_n possède donc deux valeurs propres distinctes associées à des sous-espace de dimension 1.

On en déduit que si n est pair, M_n n'est diagonalisable dans \mathbb{R} que dans le cas $n = 2$. Si n est impair on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	$\frac{2n}{n+1}$	a_n	$+\infty$
$Q'_n(x)$		-	0	+	
$Q_n(x)$	$+\infty$		0		$+\infty$

Comme précédemment, 1 n'est pas racine de P_n . Le tableau précédent montre donc que M_n possède une seule valeur propre réelle.

M_n n'est donc pas diagonalisable dans \mathbb{R} .

On le montre classiquement à l'aide d'une démonstration par l'absurde : Si M_n était diagonalisable, on aurait $M_n = PDP^{-1}$ avec $D = a_n I$, c'est-à-dire qu'on aurait $M_n = a_n I$, ce qui est faux.

En conclusion : si n est impair, différent de 1, M_n n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} .

- (b) On a vu dans la première question que le complexe a est valeur propre de M_n si et seulement si a est racine de P_n et qu'alors le sous-espace propre associé est de dimension 1.

On a également vu que $(X-1)P_n(X) = Q_n(X) = X^{n+1} - 2X^n - 1$ et que 1 n'est pas valeur propre de M_n .

Montrons que les racines complexes de P_n sont simples, c'est-à-dire qu'on ne peut avoir $P_n(\lambda) = P'_n(\lambda) = 0$.